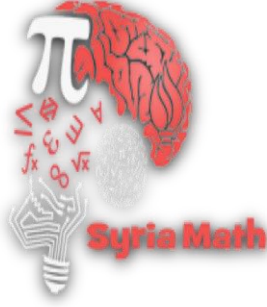


2017-12-6

نظري

◀ دكتور الماظة: محمد الشيخ

◀ المحاضرة: السابعة عشر عنوان المحاضرة: اخبارات التقارب بالإطلاق



المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- اختبار دالمبير (اختبار النسبة)

تمرين المحاضرة السابقة

أثبت أن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ متقاربة شرطياً

الحل :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{i^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

نعلم أن $\ln n < n ; n \geq 2$

$$\rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

بما أن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة فإن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ متباعدة

← $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ ليست متقاربة بالإطلاق

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} = \frac{-1}{\ln 2} - \frac{i}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{i}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} - \frac{i}{\ln 7} + \frac{1}{\ln 8} + \dots$$

الآن سنكتب كل حد بشكل جبري :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} &= \left(\frac{-1}{\ln 2} + 0i \right) + \left(0 + \frac{1}{\ln 3} i \right) + \left(\frac{1}{\ln 4} + 0i \right) + \left(0 + \frac{1}{\ln 5} i \right) \\ &+ \left(\frac{-1}{\ln 6} + 0i \right) + \left(0 - \frac{1}{\ln 7} i \right) + \left(\frac{1}{\ln 8} + 0i \right) + \dots \end{aligned}$$

* إن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لـ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ هي :

$$\frac{-1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n}$$

وهي متقاربة وذلك حسب ليبنتز (متناوبة وحدها العام بالقيمة المطلقة متناوية متناقصة وتسعى إلى الصفر)

* وكذلك متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ هي :

$$-\frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n + 1}$$

أيضاً متقاربة حسب ليبنتز

نستنتج أن كلا من متسلسلات الأجزاء الحقيقية و التخيلية متقاربة ← $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$ متقاربة

$$\leftarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n} \text{ متقاربة شرطياً}$$

الآن سنبدأ بمحاضرتنا

تمرين

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \text{cis } n}{n^2}$

حيث a ثابت عقدي طويلته أكبر تماماً من الواحد

الحل :

$$\sqrt[n]{|3_n|} = \sqrt[n]{\frac{|a|^n |\text{cis } n|}{n^2}} = \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n^2}} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow \frac{|a|}{1} = |a| > 1$$

تذكرة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$$

*متى نلجأ إلى النهاية العليا؟ إذا لم يوجد نهاية
 ← حسب اختبار كوشي فالمتسلسلة متباعدة

تمرين

ادرس حسب قيم العدد العقدي z تقارب بالإطلاق $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$

الحل: (وهنا لا نبدأ بالصفـر لأن 0 غير معرف)

سوف نطبق الجذر النوني

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{n^n |z|^{n^2}} = n|z|^n$$

وهنا نميز حالتين

ملاحظة:

التابع الأسّي أقوى من أي تابع كثير حدود
 فنهيته تتغلب على نهاية كثير حدود (نحو
 اللانهاية)

يسعى

$$1 - |z| \geq 1 \text{ وبالتالي } \begin{cases} \infty \\ \infty \end{cases} \text{ متباعدة } \infty > 1$$

يسعى

$$1 - |z| = 1 \text{ وبالتالي } \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$$1 - |z| < 1 \text{ وبالتالي سوف تصبح هنا حالة عدم تعين وبالتالي هي متقاربة بإطلاق } 0 < 1$$

بالنتيجة تكون:

$$1 - |z| \in D(0,1) \iff \text{المتسلسلة } \sum n^n z^{n^2} \text{ متقاربة بالإطلاق}$$

$$1 - |z| \in \mathbb{C} \setminus D(0,1) \iff \text{المتسلسلة متباعدة}$$

اختبار دالمبير (اختبار النسبة)

$$\text{لتكن } \sum z_n \text{ متسلسلة عقدية وليكن } L = \overline{\lim} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

$$l = \underline{\lim} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

عندئذ:

$$L > 1 \text{ فإن } \sum z_n \text{ متقاربة بالإطلاق} \quad \boxed{1}$$

$$l > 1 \text{ فإن } \sum z_n \text{ متباعدة} \quad \boxed{2}$$

٣ $l \geq 1 \geq L$ يفشل المعيار في تحديد طبيعة المتسلسلة وكحالة خاصة من ٣ إذا كان $l = L = 1$ يفشل المعيار

تمرين

بين فيما إذا كان اختبار كوشي يبين لنا طبيعة المتسلسلة التالية :

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots$$

حيث a, b ثابتان عقديان يحققان $0 < |a| < |b| < 1$

الحل :

$$\sqrt[n]{|3_n|}, \sqrt[n]{1} = 1, \sqrt{|a|}, \sqrt[3]{|b|}, \sqrt[4]{|a^2|}, \sqrt[5]{|b^2|}$$

$$1, |a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{1}{3}}, |a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{2}{5}}, |a|^{\frac{1}{2}}, \dots$$

وهنا إذا أردنا إثبات تباعد متتالية يجب إيجاد متتاليتين تسعى كل منها إلى النهاية إن المتتالية الجزئية :

$$|a|^{\frac{1}{2}}, |a|^{\frac{1}{2}}, |a|^{\frac{1}{2}}, \dots \rightarrow |a|^{\frac{1}{2}}$$

ثم إن :

$$1, |b|^{\frac{1}{3}}, |b|^{\frac{2}{5}}, |b|^{\frac{3}{7}}, \dots, |b|^{\frac{n}{2n+1}}, \dots \rightarrow |b|^{\frac{1}{2}}$$

بالتالي : $|b|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع لـ $\{\sqrt[n]{|3_n|}\}$

وظيفة :

أثبت أن $|a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{1}{2}}$ هما نقطتا تجمع وحيدتان للمتتالية $\sqrt[n]{|3_n|}$

وبعد اثبات الوظيفة تصبح لنا النهاية العليا

$$\leftarrow \lim \sqrt[n]{|3_n|} = |b|^{\frac{1}{2}} < 1 \text{ بالإطلاق}$$

وبالتالي متتالية الجذر النوني ليست متقاربة لأنها لا نستطيع تطبيق اختبار كوشي

طلب إضافي

إذا كانت المتسلسلة متقاربة فاحسب مجموعها

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots$$

وبما أن المتسلسلة متقاربة بالإطلاق فإننا نستطيع إجراء عدد غير منتهي من التبدل بين حدود المتسلسلة

$$= \underbrace{(1 + a + a^2 + \dots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } a \text{ وحدها الأول } 1} + \underbrace{(b + b^2 + b^3 + \dots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } b \text{ وحدها الأول } b}$$

ملاحظة : هذه المساواة صحيحة لأن المتسلسلة متقاربة بالإطلاق ولو كانت متقاربة لا يجوز التفرقة

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-b} = \frac{1-b+b-ab}{(1-a)(1-b)} = \frac{1-ab}{(1-a)(1-b)}$$

بالتالي اختبار كوشي ينجح من تعيين طبيعة المتسلسلة

تمرين

هل ينجح اختبار دالمبير في تعيين طبيعة المتسلسلة في التمرين السابق

$$\left| \frac{3_{n+1}}{3_n} \right| = |a|, \frac{|b|}{|a|}, \frac{|a|^2}{|b|}, \frac{|b|^2}{|a|^2}, \frac{|a|^3}{|b|^2}, \dots$$

لنأخذ المتتالية الجزئية التالية :

$$|a|, |a| \frac{|a|}{|b|}, |a| \left(\frac{|a|}{|b|} \right)^2, |a| \left(\frac{|a|}{|b|} \right)^3, \dots, |a| \left(\frac{|a|}{|b|} \right)^n, \dots$$

هندسية أساسها $\frac{|a|}{|b|} > 1$

⇐ متقاربة ونهايتها 0 (إن 0 أصغر نقطة تجمع $\left| \frac{3_{n+1}}{3_n} \right|$ لأن أي متتالية جزئية من المتتالية $\left| \frac{3_{n+1}}{3_n} \right|$ لن تتقارب إلى عدد سالب لأن جميع حدودها موجبة تماماً)

$$\lim \left| \frac{3_{n+1}}{3_n} \right| = 0 \neq 1 \text{ فالنتيجة فإن النهاية الدنيا } 1$$

ثم إن المتتالية الجزئية التالية :

$$\frac{|b|}{|a|}, \left(\frac{|b|}{|a|} \right)^2, \left(\frac{|b|}{|a|} \right)^3, \dots, \left(\frac{|b|}{|a|} \right)^n, \dots$$

متتالية هندسية أساسها $1 < \frac{|b|}{|a|}$

فهي تسعى إلى ∞

و ∞ نقطة تجمع المتتالية الأصلية

$$\overline{\lim} \left| \frac{3_{n+1}}{3_n} \right| = \infty \neq 1$$

واختبار دالمبير يفشل في تحديد طبيعة المتسلسلة

:

من المثال السابق أن اختبار كوشي لتقارب المتسلسلات هو أقوى من اختبار دالمبير بمعنى أنه قد يفشل معيار دالمبير من تحديد طبيعة متسلسلة بينما ينجح معيار كوشي

إلا أنه إذا نجح دالمبير في تحديد طبيعة المتسلسلة فإن اختبار كوشي حتماً سينجح في تحديد طبيعتها .

انتهت المحاضرة

إعداد: ميامر طعمتة - شهناز طايش - ميني خرما