نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة: الخامسة عشر   عنوان المحاضرة: المتتاليات والمتسلسلات العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـخواص المتسلسلات العقدية

---

*قام الدكتور بمراجعة بعض الأفكار في المحاضرة السابقة ومنها :

المتسلسلة الهندسية من الشكل $\sum_{n=n_0}^{\infty} ba^n$

١- $|a| \geq 1$ فإن هذه المتسلسلة متباعدة

٢- $|a| < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة

وأن $\sum_{n=n_0}^{\infty} ba^n = \frac{ba^{n_0}}{1-a}$

أمثلة

١ - $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$

الطريقة الأولى $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ هندسية أساسها i

وبما أن $|i| = 1$ فهي متباعدة

الطريقة الثانية $\{i\}^n$ متتالية متباعدة لأن $i^n \nrightarrow 0$

$\Leftarrow$ فالمتسلسلة متباعدة (حسب اختبار الحد العام)

٢ - $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ هندسية أساسها

$1+i\sqrt{3}$ و إن : $\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{4} = 2 > 1$

فالمتسلسلة متباعدة

٣ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{3^{n+2}}$ متسلسلة هندسية تكتب بالشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$$

هندسية و أساسها $\left(\frac{1+i}{3}\right)$ وحدها الأول $\frac{1}{9}$ (و هنا كتبنا حدها الأول إذا طلب المجموع ,هنا سوف نوجد المجموع)

وبما أن :

$$\left|\frac{1+i}{3}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة و إن مجموعها هو :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{3^{n+2}} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1+i}{3}} = \frac{1}{9-3-3i} = \frac{1}{6-3i} \overset{\text{نضرب بالمرافق}}{\cong} \frac{6+3i}{45} = \frac{6}{45} + \frac{1}{15}i$$

(إذا لم يطلب الشكل الجبري نكتفي بما كتبنا و أذا طلب الشكل الجبري نضرب بالمرافق)

ملاحظة : نحصل على الحد الأول للمتتالية بأن نعوض أصغر دليل لها

خواص المتسلسلات

١ـ إذا اختلفت متسلسلتان بعدد منتهي من الحدود فإن للمتسلستين الطبيعية ذاتها (متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً) ولكن ليس من الضروري أن تملكان المجموع ذاته في حال التقارب أي إذا وجد عدد N بحيث يتحقق ما يلي :

$$З_n = W_n \quad \forall n > N$$

فإن : $\sum З_n , \sum W_n$ متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً

الأثبات :

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} З_n$

$\{\sigma_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$

عندئذ $\forall n \in N$

$$S_n - \sigma_n = \underbrace{(З_0 + З_1 + \cdots + З_n) - (w_0 + W_1 + \cdots + W_n)}_{\text{عدد ثابت}} \ldots\ldots .*$$

$$\{\sigma_n\} \text{ متقاربة } \underbrace{\Leftrightarrow}_{*\text{حسب}} \{S_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum З_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum W_n \text{ متقاربة}$$

٢- مجموع متسلسلتين عقديتين متقاربتين $\sum W_n$, $\sum 3_n$ (أي $\sum(3_n + W_n)$) متسلسلة متقاربة وفي حال التقارب نكتب :

$$\sum(3_n + W_n) = \sum 3_n + \sum W_n$$

والعكس غير صحيح ومثال على ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

وهي متسلسلة متقاربة ولكنها مجموع لمتسلسلتين متباعدتين هما $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$

◄**ملاحظة** : إذا كانت إحدى المتسلسلتين متقاربة و الأخرى متباعدة فإن مجموعهما متسلسلة متباعدة

إذا كانت المتسلسلتين متقاربتين فان مجموعها متقاربة

إما أذا كانت المتسلسلتين متباعدتين فأن مجموعها متقارب

٣- $\lambda \neq 0$ فإن

$$\sum(\lambda 3_n) \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \sum 3_n \text{ متقاربة }$$

وفي حال التقارب نستطيع أن نكتب :

$$\sum(\lambda 3_n) = \lambda \sum 3_n$$

$$* \sum(\lambda 3_n) \text{ متباعدة } \Leftrightarrow \sum 3_n \text{ متباعدة }$$

تنويه لا نستطيع إخراجعامل المشترك إذا كان المجموع غير منتهي إلا في حال التقارب

◄**ملاحظة** : عندما يطلب منا في نص السؤال ادرس تقارب يعني بين فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة

مبرهنة

تكون متسلسلة عقدية $\sum 3_n$متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall\, 3 > 0\,;\ \exists N_\varepsilon > 0 : \forall\, m > n \geq N \Rightarrow |3_{n+1} + \cdots + 3_m| < \varepsilon$$

الأثبات

بفرض أن $\sum 3_n$ متسلسلة عقدية متقاربة ولتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum 3_n$ عندئذ

$$\overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow} \sum 3_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{S_n\}\text{كوشية}$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists(\varepsilon) > 0 \,; \forall\, m > n > N; |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |3_n + 3_{n+1} + \cdots + 3_m| < \varepsilon$$

توضيح:

$$S_m = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n + 3_{n+1} + \cdots + 3_m$$

$$S_n = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n$$

بالطرح نجد

$$S_m - S_n = 3_{n+1} + \cdots + 3_m$$

مبرهنة

تكون المتسلسلة العقدية $\sum(x_n + i\, y_n)$ متقاربة ومجموعها S إذا وفقط إذا كانت متسلسلنا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لها متقاربة أي بصياغة أخرى :

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ متقاربة و مجموعها } Re\, s \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ متقاربة و مجموعها } Im\, s \end{array} \right)$$

الأثبات

لتكن $\{S_m\}$ متتالية المجاميع الجزئية

لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\, y_n)$ وليكن $\{\alpha_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$

وليكن $\{\beta_n\}$متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ عندئذ

$$S_n = \left(x_{n_0} + i\,y_{n_0}\right) + \cdots + \left(x_n + i y_n\right)$$

$$= \left(x_{n_0} + \cdots + x_n\right) + i\left(y_{n_0} + \cdots + y_n\right)$$

$$= \alpha_n + i\,\beta_n$$

في المتتاليات تعرف متتالية عقدية متقاربة إذا وفقط إذا كانت الأجزاء العقدية والتخيلي لها متقاربة

$\Longleftarrow \sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n)$ متقاربة $\Leftrightarrow \{S_n\}$ متقاربة $\overset{\text{حسب مبرهنة}}{\Leftrightarrow}$ في المتتاليات تعرف متتالية عقدية متقاربة إذا وفقط إذا كانت الأجزاء العقدية والتخيلي لها متقاربة ($\{\beta_n\}, \{\alpha_n\}$ متقاربتان)

$\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ ، $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ متقاربتان وفي حال التقارب

فإن المجموع $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n) = S$

وهذا يكافئ أن $S_n \longrightarrow S$ يكافئ $\begin{Bmatrix} \alpha_n \to Re\ s \\ \beta_n \to Im\ s \end{Bmatrix}$ وهذا سيكافئ $\begin{Bmatrix} \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = Re\ s \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n = Im\ s \end{Bmatrix}$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + i\,\frac{n}{n^3+3}\right)$$

إن هذه المتسلسلة متباعدة لأن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لها هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

تذكرة

١- $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

متباعدة إذا كانت $P \leq 1$ ومتقاربة إذا كانت $P > 1$

٢- $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}$

متباعدة ولكن حدها العام متتالية متقاربة على الصفر

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + i\,\frac{n}{n^3+3}\right)$$

متقاربة لأن كلاً من $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$ متقاربة

تمرين :

ادرس تقارب المتسلسلة وفي حال التقارب أوجد المجموع $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + i\,\frac{1}{n!}\right)$

متسلسلة الأجزاء الحقيقية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة ومجموعها

$$S_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية لها $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

نعل أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

نعوض $x = 1$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

فالمتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + i\,\frac{1}{n!}\right)$ متقاربة ومجموعها يساوي $(1 + ie)$

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما