نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثانية والعشرون ◄ عنوان المحاضرة : تصنيف الزمر المنتهية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-مبرهنات سيلوف .

٢- تصنيف الزمر المنتهية.

مبرهنة سيلوف الثانية :بدون برهان: لتكن G زمرة منتهية و مرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي P , كل P – زمرة جزئية في G تكون محتواة في P – جزئية سيلوفية في G.

مبرهنة سيلوف الثالثة :بدون برهان: لتكن G زمرة منتهية و مرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي P , إن عدد جميع ال P – زمر الجزئية السيلوفية في G يساوي $K \in N$: $1 + PK$ ويقسم مرتبة G .

مبرهنة : بدون برهان: لتكن G زمرة منتهية و K هي P – زمرة جزئية سيلوفية في G عندئذ الشروط الاتية متكافئة:

١) K تكون ناظمية في G .

٢) لا يوجد في G سوى P – زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K .

تمرين : لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 15 أثبت أن الزمرة G دوارة .

الحل :

لدينا $3.5 = 15 = (G:1)$ حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبها 3 ولتكن K

إن K دوارة ولنفرض أن $K =< a >$ $\qquad (< a >:1) = o(a) = 3$

وايضاً الزمرة G تحوي زمرة جزئية مرتبها 5 ولتكن H

إن H دوارة ولنفرض أن $H =< b >$ $\qquad (< b >:1) = o(b) = 5$

إن K هي زمرة 3– زمرة جزئية سيلوفية في G **وعدد هذه الزمر الجزئية تساوي $1 + 3K$ وتقسم مرتبة G**

$K = 0$ $\qquad$ 1 مقبول

$K=1$ $\quad$ $K=2$ $\quad$ $\begin{cases}4\\7\end{cases}$ مرفوض كون كل واحد منهم لا يقسم مرتبة G

بالتالي $K\neq 0$ فإن المقدار $1+3K$ لا يقسم مرتبة G وهذا يبين انه يوجد 3− زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية حسب النص السابق .

إن H هي 5− زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 **وعدد هذه االزمر الجزئية يساوي $1+5K$ ويجب أن يقسم مرتبة G .**

$K=0$ $\quad$ 1 مقبول

$K=1$ $\quad$ $K=2$ $\quad$ $\begin{cases}6\\11\end{cases}$ مرفوض

بالتالي من أجل $K\neq 0$ فإن المقدار $1+5K$ لايقسم مرتبة G وبالتالي توجد زمرة جزئية واحدة فقط من الشكل : 5− زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية حسب النص السابق .

أصبح لدينا K,H زمرتين جزئيتين المراتب لهما اعداد أولية فيما بينهما

وأن $H\cap K=<e>$ لأنه إذا كان $y\in H\cap K$ وأن .

بفرض أن $o(y)=t$ نجد ان $y^{\alpha}=e$

$$y\in K \;\; ; \;\; y^3=e$$

$$y\in H \;\; ; \;\; y^5=e$$

ومنه t يقسم 3,5 وبالتالي $t=1$ ومنه $y=e$

فضلاً عن ذلك $\forall a\in K \quad , \quad b\in H$

$$(aba^{-1})b^{-1}\in Hb^{-1}=H$$

$$a(ba^{-1}b^{-1})\in aK=K$$

$$\Longrightarrow aba^{-1}b^{-1}\in H\cap K=<e>$$

$$\Longrightarrow aba^{-1}b^{-1}=e$$

$$\Longrightarrow ab=ba$$

ومنه $o(ab)=o(a).o(b)=3.5=15$

ومنه $G=<ab> \Longrightarrow G$ دوارة .

تمرين : كل زمرة منتهية مرتبتها 4 إما تماثل Z_4 أو $Z_2 \oplus Z_2$

الاثبات :

لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1) = 4$

- إذا كانت G دوارة فإن $G \cong Z_4$
- لنفرض أن G ليست دوارة وليكن $a \in G$ بحيث $a \neq e$ عندئذ $K =< a >$ زمرة جزئية من G مرتبتها 2 وبالتالي $K \cong Z_2$.
- ولما كانت $G \neq K$ فإنه يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ ومنه $H = < b >$ زمرة جزئية من G مرتبتها 2 وبالتالي $H \cong Z_2$.

ولما كانت G تبديلية ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))فإن $H.K = K.H$ وبالتالي $K.H$ زمرة جزئية من G مرتبتها 4.

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان

$$y \,\epsilon\, K \cap H \quad : \quad y \neq e \quad ; \; y \,\epsilon\, H = \{e, b\} \Longrightarrow y = b$$

$$y \,\epsilon\, K = \{e, a\} \Longrightarrow y = a$$

وهذا غير ممكن ومنه $G = K \times H$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4

واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

يمكن تعميم ما سبق لأجل أي زمرة مرتبتها P^2

تمرين : لتكن G زمرة منتهية مرتبتها P^2 حيث P عدد اولي عندئذ إما $G \cong Z_{P^2}$ أو $G \cong Z_P \oplus Z_P$.

الحل :

- اذا كانت الزمرة G دوارة عندئذ $G \cong Z_{P^2}$.
- لنفرض أن G ليست دوارة . عندئذ فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها P . ولتكن $H \cong Z_P$
- ولما كانت $G \neq H$ فإنه يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin H$ ومنه $K = < b >$ زمرة جزئية من G ولما كانت $K \neq < e >$ وحسب لاغرانج فإن مرتبة K تساوي P. ومنه $K \cong Z_P$

كما أن $H \cap K =< e >$ لأنه إذا كان $H \cap K \neq< e >$ فإن يوجد $y \in H \cap K$ بحيث $y \neq e$.

بفرض أن $o(y) = t$ نجد ان

$$y \in K \Longrightarrow y^P = e \Longrightarrow K =< y >$$

$$y \in H \Longrightarrow y^P = e \Longrightarrow H =< y >$$

ومنه $K = H$ وهذا غير ممكن أي أن $H \cap K =< e >$

كما أن G تبديلية (كل زمرة مرتبتها P^2 فهي تبديلية) فإن الجداء $K.H$ زمرة جزئية من G

$$\boxed{(H.K:1) = (H:1).(K:1) = P^2}$$

ومنه $G = H.K$ واخيراً

$$G = H \times K \cong H \oplus K \cong Z_P \oplus Z_P$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج