الاربعاء ٥ صفر ١٤٣٩ هـ

٢٥ تشرين (١) ٢٠١٧

المحاضرة الثامنة

الفصل الثالث

شرط انقطاع السلاسل.

لتكن R حلقة واحدية تبديلية و M هو R-module

* نقول عن M انه يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة.
اذا كانت اي سلسلة من المودولات الجزئية من M

$M_1 \geq M_2 \geq$ ---

تحقق $\exists n \in N \quad \forall i \geq n \quad M_i = M_n$

* نقول عن M انه يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة اذا
كانت اي سلسلة من المودولات الجزئية من M

$M_1 \leq M_2 \leq$ ------

تحقق $\exists n \in N \quad \forall i \geq n \quad M_i = M_n$

* ان M مودول نوثري اذا حقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة
* ان M مودول ارتيني اذا حقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة.

امثلة: (١) كل حقل هو آرتيني ونوثري

(٢) ان الفضاء الشعاعي اذا كان منتهي البعد
يكون آرتيني ونوثري معاً (R^2, R^3)

(٣) حلقة الحدوديات التي تحوي المتغيرات ليست
آرتينية ولانوثرية $R = R[x_i; i \in N]$

$\langle x_1 \rangle \subsetneqq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneqq$

$\langle x_1 \rangle \supsetneqq \langle x_1^2 \rangle \supsetneqq$ ---

Galaxy

Scanned by CamScanner

مبرهنة (١٩)

ليكن M هو R-module القضايا التالية متكافئة

١_ M نوثري

٢_ كل موديول جزئي من M منتهي التوليد

(١ ⇐ ٢)

نفرض جدلاً انه يوجد N موديول جزئي من M غير منتهي التوليد على R

$$\exists\, n_1 \in N \quad ; n_1 \neq 0 \qquad \langle n_1 \rangle \subsetneqq N \leq M$$

$$\exists\, n_2 \in N \qquad \langle n_1 \rangle \subsetneqq \langle n_1, n_2 \rangle \subsetneqq N \leq M$$

$$n_2 \notin \langle n_1 \rangle$$

$$\exists\, n_3 \in N \qquad n_3 \notin \langle n_1, n_2 \rangle$$

$$\langle n_1 \rangle \subsetneqq \langle n_1, n_2 \rangle \subsetneqq \langle n_1, n_2, n_3 \rangle \subsetneqq \cdots \leq M$$

وهي سلسلة من الموديولات الجزئية التي لا تتقطع

وهنا يناقض كون M نوثري

عندئذ الفرض الجدلي خاطئ

(٢ ⇐ ١) نفرض $M_1 \leq M_2 \leq \cdots$

$$N := \bigcup_{i \geq 1} M_i \leq M \quad \text{منتهي التوليد}$$

$$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_n \in M \quad ; \quad N = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$$

$$\exists\, i_0 \in \mathbb{N} \qquad m_1, m_2, \ldots, m_n \in M_{i_0}$$

$$\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle \subseteq M_{i_0}$$

$$\Rightarrow N = \bigcup_{i \geq 1} M_i \leq M_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \geq 1} M_i = N$$

Scanned by CamScanner

ومنه فإن $N = M_{i_0}$

أي إن السلسلة تتقطع عند M_i ومنه M نوثري.

مبرهنة (٢): لتكن لدينا المتتالية التامة من R-linears

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

عندئذ: $\boxed{1}$ M نوثرية $\Leftrightarrow$ M', M'' نوثرية.

$\boxed{2}$ M آرتينية $\Leftrightarrow$ M', M'' آرتينية.

نبرهن $\boxed{1}$ اعتماداً على $\boxed{2}$ (لعكس الاصطلاحات)

$\boxed{2}$ $\Leftarrow$ نفرض جدلاً أن M' ليس آرتيني حيث M آرتيني.

أي انه توجد سلسلة من المودولات الجزئية من M' لا تتقطع

$$M_1' \supsetneq M_2' \supsetneq \cdots$$

α متباين

$$\alpha(M_1') \supsetneq \alpha(M_2') \supsetneq \cdots$$

ومنه نحصل على سلسلة متناقصة

من المودولات الجزئية من M لا تتقطع $\Leftarrow$ الفرض الجدلي خاطئ.

عندئذ: M' آرتيني

لنأخذ السلسلة $M_1'' \supseteq M_2'' \supseteq M_3'' \cdots$ المتناقصة من المودولات

الجزئية من M'' ونثبت انها تتقطع باستخدام β الغامر

$$\beta^{-1}(M_1'') \supseteq \beta^{-1}(M_2'') \supseteq \cdots$$

وهي سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq n \quad \beta^{-1}(M_i'') = \beta^{-1}(M_n'')$$

$\Rightarrow M_i'' = M_n''$ السلسلة تتقطع

$\Leftarrow$ لتكن $M_1 \geq M_2 \geq \dots$ سلسلة متناقصة من الموديولات الجزئية في M وسنثبت أنها تتقطع

باستخدام التباين α

$$\alpha^{-1}(M_1) \geq \alpha^{-1}(M_2) \geq \dots \quad \star$$

وهي سلسلة متناقصة في M' وبما أن M' آرتينية.

فإن السلسلة $\star$ تتقطع

$$\exists n' \in N \quad \forall i \geq n' \quad \alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_{n'})$$

باستخدام الغمر β.

$$\beta(M_1) \geq \beta(M_2) \geq \dots \quad \star\star$$

سلسلة متناقصة من M'' وبما أن M'' آرتينية

فإن السلسلة $\star\star$ تتقطع

$$\exists n'' \in N \quad \forall i \geq n'' \quad \beta(M_i) = \beta(M_n)$$

نفرض $n = \max\{n', n''\}$

$$\forall i \geq n \quad \alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_n)$$

$$\beta(M_i) = \beta(M_n)$$

$$\Rightarrow \quad M_i \subseteq M_n$$

$$\forall m \in M_n \quad \beta(m) \in \beta(M_n) = \beta(M_i)$$

$$\exists \hat{m} \in M_i \quad \Rightarrow \quad \beta(m) = \beta(\hat{m})$$

$$\beta(m - \hat{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m - \hat{m} \in \ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$$

حيث المتتالية تامة

$$\exists m' \in M' \quad \alpha(m') = m - \hat{m}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow m' = \alpha^{-1}(m) - \alpha^{-1}(\hat{m}) \in \alpha^{-1}(M_n)$$
$$\in \alpha^{-1}(M_i) \qquad \in \alpha^{-1}(M_i)$$
$$\Rightarrow m' \in \alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_n)$$
$$\alpha(m') = \alpha(\alpha^{-1}(m) - \alpha^{-1}(\hat{m}))$$
$$\Rightarrow \alpha(m') \in \alpha(\alpha^{-1}(M_i)) \cap \operatorname{Im}\alpha$$
$$\Rightarrow \alpha(m') \in M_i \cap \operatorname{Im}\alpha$$

بما ان $\alpha(m') = m - \hat{m}$ فإن $m = \alpha(m') + \hat{m}$

و $\hat{m}, \alpha(m') \in M_i$; $m \in M_i$

$$\Rightarrow M_n \subseteq M_i$$
$$\Rightarrow M_i = M_n \Rightarrow M \text{ آرتيني}$$

نتيجة (٤) لتكن $M, M_1, M_2 \_\_\_ M_n$ هي R_modul فإن القضايا التالية صحيحة.

1) اذا كانت $M_1, M_2 \_\_\_ M_n$ نوثرية فإن $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ نوثري

2) اذا كانت R نوثرية و M موديول منتهي التوليد فإن M نوثري.

[1] يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي على M

عندما $n=1$ فإن $\oplus M_1 = M_1 \Leftarrow$ نوثري حسب الفرض

نفرض صحتها من اجل $n-1$ ونثبت صحتها من اجل n

لتكن المتتالية تامة

$$0 \longrightarrow \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i \longrightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

بما ان M_n نوثري فإنه حسب المبرهنة السابقة والفرض الاستقرائي

$\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ نوثري فإن $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ نوثري.

Galaxy

Scanned by CamScanner

/ /

$\boxed{2}$ بما ان R نوثرية وحسب $\boxed{1}$ فانه من الفرض لدينا M منتهي التوليد

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_n \in M \;;\; M = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$

بما ان كل حلقة هي موديول على نفسها فان

$R^n = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$ نوثري

لنأخذ المتتالية التامة

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

$$e_i \longrightarrow m_i$$

حسب المبرهنة السابقة بما ان R^n نوثري فان M نوثري.

تمرين (1) اذا كان M موديول نوثري بين فيما اذا كان كل موديول جزئي من M هو نوثري

تمرين (2) اذا كانت R نوثرية / آرتينية فهل $S^{-1}R$ نوثرية / آرتينية وهل العكس صحيح

⇐ لتكن السلسلة المتزايدة $S^{-1}I_1 \subseteq S^{-1}I_2 \subseteq \ldots$

باستخدام الصورة العكسية للتمديد الطبيعي

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$

وهي سلسلة متزايدة في R وبما ان R نوثرية فان $S^{-1}R$ نوثرية.

مبرهنة هلبرت الاساسية (تقبل بدون برهان)

اذا كانت R حلقة نوثرية فان $R[X]$ نوثرية

ليس شرطاً ان يكون العكس صحيح

كل مثالي في حلقة نوثرية هو نوثري

ملاحظة: كل منطقة مثاليات رئيسية هي حلقة نوثرية واذا لم تكن حقل فهي ليست نوثرية

مبرهنة Krull's Itersection (كرل)

R نوثرية و $I \trianglelefteq R$ يحقق $I \subseteq J(R)$ ولكن M موديول منتهي التوليد

Galaxy

٤٠

عندئذ: $\bigcap_{k\geq 0}(I^k M)=\{0\}$

حسب نتيجة سابقة تكون M نوثرية كونه M موديول منتهي التوليد على حلقة نوثرية.

$N:=\bigcap_{k\geq 0}(I^k M)$ موديول جزئي في M وكون M نوثريه فإن N موديول منتهي التوليد

باستخدام الـ Nak الاساسية اذا كان $N=IN$ فإن $N=\{0\}$

اي ان علينا اثبات $N=IN$

نعلم سابقاً $IN\subseteq N$

ونثبت الاحتواء الثاني في المحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة الثامنة.

الاعتذار عن الخطاء لايجرح كرامتك

بل يجعلك كبيراً بعين من أخطأت بحقه.

Scanned by CamScanner

المحاضرة التاسعة — الاثنين ١٠ صفر ١٤٣٩ هـ

٣٠ تشرين (١) ٢٠١٧ م

البرهان الاحتواء الثاني

نعرف مجموعة المودولات $X=\{\mathcal{L}\le M \;;\; \mathcal{L}\cap N = IN\}$

$$\Rightarrow IN\in X \Rightarrow X\neq\phi$$

وبالتالي يوجد عنصر أعظمي وليكن $\mathcal{L}$ في X

$$\forall a\in I \qquad L:\langle a\rangle \subseteq L:\langle a^2\rangle \subseteq \dots$$

وهي سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M

$$\exists n\in N \qquad \forall i\ge n \qquad L:\langle a^n\rangle = L:\langle a^i\rangle$$

فإن السلسلة تتوقف

$$\forall m\in (L+a^nM)\cap N \Rightarrow m\in N$$

$$\exists x\in L \quad y\in M \qquad m=x+a^ny$$

$$am=ax+a^{n+1}y$$

$$am\in IN=L\cap N\subseteq L \qquad ax\in L \Rightarrow a^{n+1}y\in L$$

$$\Rightarrow y\in L:\langle a^{n+1}\rangle = L:\langle a^n\rangle$$

$$\Rightarrow a^ny\in L$$

$$\Rightarrow m=x+ay\in L$$

$$\Rightarrow m\in L\cap N=IN$$

$$\Rightarrow (L+a^nM)\cap N\subseteq IN$$

$$IN=L\cap N\subseteq (L+a^nM)\cap N\subseteq IN$$

$$\Rightarrow L+a^nM\in X$$

$\mathcal{L}$ عنصر أعظمي في X ومنه $L+a^nM\subseteq L$

$$a^nM\subseteq L \Rightarrow I^nM\subseteq L$$

Galaxy ٤٥

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow N = N \cap (I^n M) \subseteq L \cap N = IN$$

$$\Rightarrow N = I.N$$

$$N = \bigcap_{k \geq 0} (I^k M) = \{0\}$$

وذلك حسب مبرهنة Nak الاساسية

نتيجة (٣): لتكن $(R, \mathcal{Y})$ حلقة محلية ونوثرية فإن $\bigcap_{k \geq 0} \mathcal{Y}^k = \{0\}$

بما أن R نوثرية فإنها مودول على ذاتها منتهي التوليد

$$\mathcal{Y}^k R = \mathcal{Y}^k \quad ; \mathcal{Y}^k \in J(R) \quad \forall k \geq 0$$

عندئذ حسب مبرهنة Krull's I.T

$$\bigcap_{k \geq 0} \mathcal{Y}^k = \{0\}.$$

مثال: لتكن $R = \mathbb{R}[x]$ معرفة على حقل الاعداد الحقيقية

$$P = \langle x \rangle \in Spec(R)$$

$\mathcal{Y} = pR_p$ حلقة محلية حيث $(R_p, \mathcal{Y})$

$\bigcap_{k \geq p} \mathcal{Y}^k = \{0\}$ حسب النتيجة السابقة

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية نقول عن I انه مثالي متلاشي nilpotent (عديم القوى) اذا تحقق $I^n = \{0\} \quad \exists n \in \mathbb{N}$

الجذر الاساسي هو تقاطع كل المثاليات الاولية في R ونرمزله $N(R)$

نتيجة (٤): اذا كانت R نوثرية فإن $N(R)$ مثالي متلاشي

إن $N(R) \trianglelefteq R$

$$\exists a_1, a_2 ---- a_n \in R.$$

$$N(R) = \langle a_1, a_2 ----- a_n \rangle$$

$$N(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P = \sqrt{0}$$

Scanned by CamScanner

/ /

$\forall i \in \{1, 2 \ldots k\}$ $\quad a_i \in \sqrt{0}$

$\exists n_i \in N \quad a_i^{n} = 0$

$n = \max(n_1, n_2 \ldots n_k) \Rightarrow$

$\forall i \in \{1, 2 \ldots n\} \quad a_i = 0$

$\exists n \in N \quad (N(R))^n = \{0\} \Rightarrow$ $N(R)$ متلاشي في R

تعريف: لتكن R واحدية تبديلية نسمي العدد

$\sup\{n ; P_0 \subsetneq P_1 \ldots \subsetneq P_n \ ; P_i \in spec(R)\}$

حيث n عدد صحيح غير سالب بعد الحلقة

ونرمز له $\dim(R)$ وهو اطول سلسلة من

من المثاليات الاولية

أمثلة: $\boxed{1}$ اي حقل يكون بعده صفر

(لان الحقل لا يحوي سوى مثالي وحيد وهو المثالي الصفري)

$\boxed{2}$ اي منطقة مثاليات رئيسية PID وليست حقل

يكون بعدها (1) (لانها وكونه من المثالي الصفري

ومنها كل مثالي اولي مثالي اعظمي)

$\boxed{3}$ إن بعد الحلقة Z هو (1) (لانها منطقة مثاليات رئيسية)

$\boxed{4}$ بعد R هو (0).

ليس بالضرورة ان يكون المثالي الصفري مثالي اولي الا في المنطقة الصحيحة يكون دوماً اولي

مبرهنة (0): اذا كانت R آرتينية فإن $\dim(R) = 0$

لتم المطلوب علينا اثبات ان كل مثالي اولي هو مثالي اعظمي

لتكن $P \in Spec(R)$ فإن R/p آرتينية ومنطقة

صحيحة ID

اذا كانت المثاليات الاولية اعظمية فإن بعدها صفر

Scanned by CamScanner

/ /

ولكن $\bar{0} = \bar{a} \in R/p$

$\langle \bar{a} \rangle \supseteq \langle \bar{a}^2 \rangle \supseteq \cdots$

سلسلة متناقصة من عناصر R/p وبما ان R/p آرتينية

فإنه $\exists n \in N \quad \forall i \geq n \quad \langle \bar{a}^n \rangle = \langle a^i \rangle$

$n+1 > n \qquad a^n \in \langle \bar{a}^n \rangle = \langle \bar{a}^{n+1} \rangle$

$\exists \bar{b} \in R/p \qquad \bar{a}^{n+1} \bar{b} = \bar{a}^n$

$\Rightarrow \overline{ab} = 1$

$\bar{a}$ قابل للعكس في R/p $\Leftarrow$ R/p حقل

$\Leftarrow p \in \gamma\text{-}spec(R)$

بما ان كل مثالي أعظمي في الحلقة الواحدية هو أولي

فإن $\gamma\text{-}spec(R) = spec(R)$

$\Rightarrow \dim(R) = \{0\}$.

" اي سلسلة من المثاليات الأولية ستبدأ بمثالي اعظمي "

نتيجة: اذا كانت R آرتينية فإن $N(R) = J(R)$.

تمهيدية (٢): اذا كانت R آرتينية فإن $\#(\gamma\text{-}spec(R)) < \infty$

نعرف حالتين

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$ $\phi = X = \{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n \; ; \gamma_i \in \gamma\text{-}spec(R)\}$

$\exists \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n \in X \qquad \forall \gamma \in \gamma\text{-}spec(R)$

$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k \subseteq \gamma \cdot \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k \subseteq \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$

لان عنصر اصغرية

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow y_1 y_2 \cdots y_k = y \cdot y_1 y_2 \cdots y_k \subseteq y$

وبما ان كل اعظمي اولي في R فانه

$\exists\, i \in \{1,2 \ldots k\} \qquad y_i \subseteq y \Rightarrow y = y_i$

$\forall i \in \{1,2 \ldots k\} \qquad \Rightarrow \#(y\text{-}spec(R)) < \infty$

مبرهنة (٧) R آرتينية فان N(R) مثالي متلاشي

نفرض جدلاً ان N(R) ليس متلاشي (غير قابل للعدم)

$\forall n \in N \qquad N(R)^n \neq \{0\}$

$N(R) \supseteq N(R)^2 \supseteq \ldots$

سلسلة متناقصة من المثاليات في R

وبما ان R آرتينية فان السلسلة تتوقف

$\exists k \in N \qquad \forall i \geq k \qquad N(R)^k = N(R)^i$

نعرف $\qquad I := N(R)^k$

نعرف المجموعة من المثاليات $\qquad X = \{J \trianglelefteq R \quad I.J \neq \{0\}\}$

$I \in X \Rightarrow X \neq \phi$

R آرتينية فهي تحوي عنصر اصغري

عنصر اصغري

$\exists\, J_0 \in X \qquad J_0 I \neq \{0\}$

$\exists\, 0 \neq a \in J_0 \qquad aI \neq \{0\}$

$(aI)I = aI^2 = aI \neq \{0\}$

$\Rightarrow aI \in X$

$\langle a \rangle \subseteq J_0 \subseteq aI \subseteq \langle a \rangle$

$a \in J_0 \qquad J_0$ اصغري

$\Rightarrow J_0 = \langle a \rangle = aI$

Galaxy
٤٦

$\exists\, b \in I \quad a = ab = (ab)\,b = ab^2 = \cdots\cdots = ab^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$b \in I = N(R)^k = (\sqrt{0})^k$

$\exists\, t \in \mathbb{N} \quad b^t = 0$

$a = ab^t = a0 = 0$

وهذا خلاف لما سبق لدينا $a \neq 0$

عندئذٍ الفرض الجدلي خاطئ

ومنه $N(R)$ مثالي متلاشي .

انتهت المحاضرة التاسعة .

كلما تقدمت بالسن كنت أحوج إلى الرفاق

المكرسين للعلم والذكاء .