نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات القوى

مثال : أوجد منطقة تقارب متسلسلة القوى

١-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ حسب نصف قطر التقارب.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

مجال تقاربها هو $]-1,1[$

ندرس تقارب المتسلسلة على طرفي المجال :

إذا كانت $x=1 \Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ فهي متسلسلة ريمانية متباعدة

إذا كانت $x=-1 \Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ فهي متسلسلة متقاربة حسب لايبنتز و مجال (منطقة) التقارب وهو $[-1,1[$

٢-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ حدد منطقة تقاربها .

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

مجال تقاربها هو $]-\infty,+\infty[$

٣-) $x^n \cdot \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$ حدد منطقة تقاربها .

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)} = 1$$

مجال التقارب هو $]-1,1[$

ندرس تقارب المتسلسلة عند طرفي المجال:

عندما $x = 1$ يتم الحصول على المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$

و متقاربة فهي متقاربة بإطلاق حسب لايبنتز

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} \right| = \frac{1}{n(n-2)}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

نطبق معيار نهاية النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n-2)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-2n} = 1$$

المتسلسلتين من نوع واحد وحسب معيار نهاية النسبة ولأن:

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

متقاربة.

وبالتالي $\sum \frac{1}{n(n-2)}$ متقاربة

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$$

متقاربة بإطلاق عند $x = 1$.

عندما $x = -1$ يتم الحصول على المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n . x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} . (-1)^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{-1}{n(n-2)}$$

وهي متسلسلة متقاربة حسب معيار النسبة مع $\frac{1}{n^2}$

وبالتالي مجال التقارب هو $[-1,1]$

٤-) $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)\,x^n$ حدد منطقة تقاربها .

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

فهي متقاربة فقط عند المركز $x=0$

٥-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n}$ حدد منطقة تقاربها .

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1$$

تذكرة : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

فمجال التقارب هو $]-1,1[$ و لندرس المتسلسلة عند طرفي المجال :

- عندما $x=1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ و هي متقاربة شرطياً حسب لايبتنز
- عندما $x=-1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ و هي متباعدة

فمجال التقارب هو: $]-1,1]$

٦-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$

مركزها $a=-2$

بفرض $y=x+2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(5^n+1)}\qquad\ldots\qquad(*)$$

نوجد نصف قطر التقارب ل $(*)$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(5^n+1)}\cdot\frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+1}{5^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(5+\frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= 1\times 5 = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة $I =]-5,5[$

➢ولكن عندما $y = 5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}$$

ذلك لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة كما يلي :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n}{n(5^n+1)}}{\frac{1}{n}} = 1$$

فهي متباعدة

➢وعندما $y = -5$ يتم الحصول من المتسلسلة (*) على المتسلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,5^n}{n(5^n+1)}$$ حسب لايبتنز

إذاً فمنطقة تقارب المتسلسلة (*) هي $[-5,5[$ وهذا يعني أن المتسلسلة(*) لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط:

$-5 \le y < 5$ ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من اجل قيم x التي تحقق الشرط:

$$-5 < x+2 < 5$$

أي

$$-5-2 \le x < 5-2$$

$$-7 \le x < 3$$

ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $[-7,3[$

نتيجة ١ : إذا علم مجال تقارب متسلسلة القوى فإن نصف قطر التقارب يساوي نصف طول المجال في المثال السابق مجال التقارب $]-7,3[$ و نصف قطر التقارب $\rho = 5$ ومركزها $x = -2$

نتيجة ٢ : تكون متسلسلة القوى متقاربة بإطلاق من أجل كل قيمة محصورة بين طرفي مجال التقارب

خواص متسلسلات القوى :

١- متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ تتقارب بانتظام على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

٢- مجموع متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ هو تابع مستمر على $]-\rho,+\rho[$ أي قيمة x محصورة تماماً بين طرفي مجال التقارب (مر معنا مثال على ذلك و هو $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ و هو مستمر على مجال التقارب $\mathbb{R}$)

٣- إذا كان $\sum b_n x^n = \sum c_n x^n$ متسلسلتي قوى لهما المجموع ذاته في المجال $]-\rho,+\rho[$ فإن $a_n = b_n$ أياً كانت $n \geq 0$

٤- يمكن مكاملة متسلسلة القوى حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

٥- يمكننا اشتقاق حدود المتسلسلة حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

لتكن $(*)$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ متسلسلة قوى

لمكاملة هذه المتسلسلة نأخذ المجال $[0,x]$ لنتخلص من ثابت المكاملة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x c_n t^n dt = c_0 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3} + c_3\frac{x^4}{4} + \cdots + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

المتسلسلة متكاملة .

نشتق متسلسلة القوى $(*)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n x^n)' = [c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots]' + \cdots$$

$$= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots\cdots + nc_nx^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

نتيجة ١ : إن نصف قطر التقارب للمتسلسلة المكاملة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ والمتسلسلة المشتقة $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$ هو ذاته نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$

نتيجة٢ : إذا كان مجموع متسلسلة القوى $S(x)$ تابع قابل للاشتقاق عدد كبير من المرات وليكن k فإنه يكتب بالشكل :

$$\frac{d^k\, S(x)}{dx^k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots\dots(n-k+1)c_nx^{n-k}$$

تمارين :

أوجد كل من المجاميع التالية :

١- $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots.(n+1)x^n + \cdots$

الحل : نعلم أن :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-x} \forall |x| < 1$$

باشتقاق الطرفين حداً حداً :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots.(n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

٢- $x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.8} + \cdots\cdots +$

الحل : بالاستفادة من المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ التي تكون متقاربة من أجل $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ومنه $|x| < 2$ ويكون مجموعها عندئذ :

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}\dots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots=\frac{2}{2-x}$$

نكامل متسلسلة القوى حداً حداً

$$x+\frac{x^2}{2.2}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.8}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{2^n(n+1)}+\cdots=\int_0^x\frac{2}{2-t}dt$$

$$=[-2\ln(2-t)]_0^x$$

$$=-2\ln(2-x)+2\ln 2$$

$$-2\left[\ln\frac{2-x}{2}\right]=-2\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

مثال : اكتب التابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ على صورة متسلسلة قوى لـ x

$$1+t+t^2+\cdots\cdots+t^n+\cdots\cdots=\frac{1}{1-t}$$

نأخذ $t=x^2$

$$1+x^2+x^4+\cdots\cdots+t^{2n}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

او $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots\cdots+(-1)^n t^n$

نبدل كل $t=x^3$ ومنه نحصل على المطلوب

انتهت المحاضرة

إعداد :محمد أنس القزاز–لانا شهاب