6-12-2017

نظري

◄دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة: التاسع عشرة

◄عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة وذات الأمثال الثابتة.

المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وذات المراتب العليا

تأخذ المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وذات المراتب العليا الشكل:

$$a_0.y^{(n)} + a_1.y^{(n-1)} + a_2.y^{(n-2)} + \cdots + a_n.y = g(x) \ldots (1)$$

لحل هذه المعادلة نتبع طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج).

هذه الطريقة تمكننا من إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة إذا عُلِمَ لها n حلاً مستقلاً خطياً للمعادلة المتجانسة (الموافقة لها).

نفرض أننا نعلم الحل العام للمعادلة المتجانسة من الشكل:

$$a_0.y^{(n)} + a_1.y^{(n-1)} + \cdots + a_n.y = 0 \ldots (2)$$

والحل العام من الشكل:

$$y = c_1.y_1(x) + c_2.y_2(x) + \cdots + c_n.y_n(x)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت و $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلول مستقلة للمعادلة التفاضلية.

نفرض الآن أننا استبدلنا الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ بالدوال $v_1(x), \dots, v_n(x)$ هذه الدوال قابلة للمفاضلة (الاشتقاق) وبالتالي يصبح الحل العام للدوال من الشكل:

$$y = v_1(x).y_1(x) + v_2(x).y_2(x) + \dots + v_n(x).y_n(x) \quad \dots (3)$$

هذه الطريقة تسمى طريقة تحويل الثوابت (لاغرانج).

ويمكننا كتابة الحل العام بالشكل:

$$y = \sum_{i=1}^{n} v_i(x).y_i(x) \quad \dots \quad (4)$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} v_i'(x).y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x).y_i'(x) \quad \dots (5)$$

نفرض أنّ: $y_i(x)$ و $v_i(x)$ معدومة أي تساوي الصفر.

ونفرض أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).y_i(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x).y_i'(x)$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} v_i'(x).y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x).y_i''(x)$$

ونفرض أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).y_i'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x).y_i''(x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} v_i(x).\, y_i^{(n-1)}(x)$$

وذلك بفرض أنّ: $\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i^{(n-2)}(x) = 0$

وبالتالي:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} v_i(x).\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i^{(n-1)}(x)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ فتصبح:

$$a_0.\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)[a_0.\, y_i^{(n)}(x) + \cdots + a_n.\, y_i(x)] = g(x)$$

وبملاحظة أن y_i حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة وهذا يعني أنّ الحد الثاني من العلاقة السابقة يكون معدوم وبالتالي تصبح المعادلة بالشكل:

$$a_0.\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i^{(n-1)}(x) = g(x)$$

نلاحظ مما سبق أننا حصلنا على الجمل الآتية من المعادلات الخطية:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x).\, y_i^{(n-1)}(x) = \frac{g(x)}{x_0} = h(x)$$

وبالتالي يمكن اعتبارها جملة مؤلفة من m معادلة جذرية غير متجانسة تحوي n مجهول وهي $v'_1, \dots, v'_n$ ومعين أمثالها هو معين الحدود الخاصة المستقلة خطياً (معين رونسكي):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ولما كان هذا المحدد يساوي الصفر لأن جملة المعادلات غير المتجانسة كان للمجموعة حل وحيد مغاير للصفر وبحل هذه الجملة نجد قيمة وحيدة لكل $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ (نحصل عليها بالمكاملة) وهكذا نكون قد عيّنّا الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثانٍ ونضيف له الحل العام بدون طرف ثانٍ فنحصل على الحل العام المطلوب.

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمر نصر الله وياسين الحُلبي ورهف النقشي