نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة :الخامس عشرة

◄عنوان المحاضرة: مسألة القيم الابتدائية ونظرية الوجود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مسألة القيم الابتدائية والتقريبات المتتالية.

2- إثبات التقريبات هندسيا وشرط ليبتشز.

3- نظرية الوجود والمعادلات الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

4- الأمثلة الداعمة للأفكار المذكورة آنفاً.

مسألة القيم الابتدائية ونظرية الوجود

أولاً-مسألة القيم الابتدائية:

إنّ إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية: $y' = f(x,y) \dots (1)$ يتم بمعرفة القيمة الموافقة للثابت الاختياري في عبارة الحل العام للمعادلة (1) .

تتغير قيمة الثابت هذه بمعرفة قيمة المتغير للتابع $y = y(x)$ ولتكن $y = y_0 = b$ الموافقة لقيمة معينة للمتغير $x = x_0 = a$ أيّ أنّ: $y_0 = y(x)$

- نسمّي مثل هذا الشرط (شرطاً ابتدائياً) وعندها تكون مسألة القيمة الابتدائية هي إيجاد حل عام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x,y)$$

$$y(x = a) = b$$

محققة للشرط الابتدائي: $y(x) = b$

أيّ إيجاد المنحني التكاملي للمعادلة التفاضلية (1) والمار بالنقطة (a,b) في المستوي Oxy .

- يكون فيه كثير من المسائل التطبيقية الحصول على الحل العام للمعادلة أمراً صعباً إن لم يكن مستحيلاً بواسطة الطرق العادية وبالتالي ليس من الضروري الحصول على الحل $y(x)$ بالذات من معادلة واحدة وإنما الحصول على تقريب مقبول لهذا الحل وبالتالي تقتصر دراستنا على إثبات وجود حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية وإعطاء الأسلوب للحصول على تقريب لهذا الحل.

- وهذا يتطلب منا اتباع الأسلوب التالي في البرهان على وجود حل للمعادلة (1) والمسمّى بطريقة التقريبات المتتالية:

- أولاً: إنشاء متتالية من التوابع تقترب اكثر وأكثر من الحل للمعادلة (1).
- ثانياً: إثبات أنّ لهذه المتتالية من التوابع ضمن مجال مناسب نهاية $Y(x)$.
- ثالثاً: إثبات أنّ هذه النهاية حل للمعادلة.

-التقريبات المتتالية:

ننطلق من التابع: $y = y_0(x)$ وندعوه تابع المنطلق ، نجده بشكل مباشر أو بالتخمين (التقريب) ويحقق الشرط الابتدائي.

- إنّ مثل هذا التابع موجود دائماً وأبسط الحالات أن تأخذ $y = y_0(x) = b$ ونعرف تابعاً آخر $y = y_1(x)$ وبالتالي هذا يحقق الشرط:

$$y_1 = b + \int_0^x f\big(x, y_0(x)\big).dx$$

ومنه نحقق تابع آخر يحقق :

$$y_2 = b + \int_0^x f\big(x, y_1(x)\big).dx$$

هكذا نحصل على قانون بالحصول على متتالية من التوابع جميعها تحقق الشرط الابتدائي حيث أنّ:

$$y_n = b + \int_0^x f\big(x, y_{n-1}(x)\big).dx$$

ومن أجل مجال مناسب وشرط معينة أنّه عندما $n \to \infty$ فإن $y_n(x) \to Y(x)$ أيّ:

$$y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} Y(x)$$

وبالتالي $y = Y(x)$ يكون هو الحل لمسألة القيم الابتدائية.

نسمّي $y_n(x)$ هو التقريب النوني للتابع $Y(x)$ ونسمّي المنحني $y = y_n(x)$ بالمنحني التقريبي النوني.

مثال توضيحي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = x - y$$

أوجد الحل العام لها الموافق للشرط: $y_0(x) = 1$.

الحل

$$y_0(x) = 1 = b$$

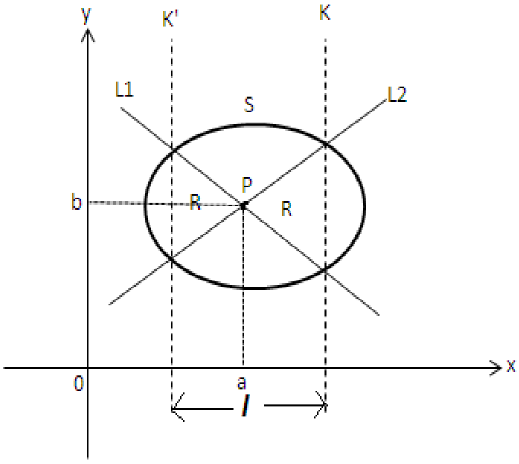
$$y_1 = b + \int_0^x f(x,y).dx = 1 + \int_0^x (x-1).dx = 1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x - [x]_0^x$$

$$y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$y_2 = b + \int_0^x \left[x - \left(1 + \frac{x^2}{2} - x\right)\right].dx$$

$$\vdots$$

◀**تنويه:** هذا الحل باستخدام التقريبات المتتالية وفي الامتحان يطلب منا التقريب إلى حد معين أيّ y_4, y_5 من أجل الصعوبة.☺



إثبات التقريبات المتتالية هندسياً:

- ندرس فيما يلي المنحنيات التقريبية في منطقة مغلقة S في المستوي xoy مفترضاً أنّ التابع $f(x,y)$ وحيد القيمة ومستمر في x و y في المنطقة S عندئذٍ يكون التابع محدداً في S أيّ أنّه:

يوجد عدد ثابت موجب M بحيث يكون من أجل جميع نقاط S أنّ $|f(x,y)| < M$.

- لتكن $P(a,b)$ نقطة داخلية في S ولنتحقق من وجود منحني تكاملي مار بالنقطة P :

نرسم مستقيمين L_1, L_2 المارين في النقطة P وميلاهما $-m, +m$ على الترتيب ونرسم المستقيمين k, k' القاطعين للمستقيم ox وبجهتين مختلفتين بالنسبة للنقطة P وبالتالي ينشأ مثلثان متقابلان بالرأس داخل S. وسنعتبر حالياً قيم x فقط الواقعة في المجال I بين المستقيمين k', k وباستخدام العلاقة:

$$y_n(x) = b + \int_0^x f\big(x, y_{n-1}(x)\big).\,dx$$

يتطلب أن يكون التابع: $y = y_{n-1}(x)$ أو $f\big(x, y_{n-1}(x)\big)$ معرفاً على المنطقة المغلقة S .

وهذا بدوره يتطلب أن تكون جميع النقاط على كل منحني تقاربي هي نقاط من S .

شرط ليبتشز:

- نقول أنّ التابع $f(x,y)$ يحقق شرط ليبتشز إذا كانت المترجحة التالية محققة:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le k.\,|y_1 - y_2|$$

وإنّ هذا الشرط لا يتحقق إلّا إذا وجد الثابت k .

ومن أجل النقطتين $(x,y_1), (x,y_2)$ لهما نفس الفاصل (الفاصلة) نقطتان ضمن S تكون القطعة الواصلة بينهما واقعة كاملاً في S .

مثال: برهن أنّ:

$$f(x,y) = x.|y|$$

يحقق شرط ليبتشز في الساحة: $R = \{(x,y): |x| \le a; |y| < \infty\}$

الحل

حسب الشرط:

$$\left|x.|y_1| - x.|y_2|\right| = |x|.\left||y_1| - |y_2|\right| \le |x|.|y_1 - y_2| = a.|y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow k = a$$

أيّ أنّ الشرط محقق.

ثانياً- نظرية الوجود:

- إذا كان $f(x,y)$ تابع مستمر ووحيد التعيين (له قيمة واحدة) موجوداً في الساحة المغلقة في المستوي xoy ويحقق شرط ليبتشز أيّ يوجد عدد ثابت a حيث أنّ:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le A.|y_1 - y_2|$$

- وإذا كان (a,b) نقطة داخلية في S فيوجد للمعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ حل وحيد $y = Y(x)$ بحيث $y = b$ عندما $x = a$ بمعنى أنّه يوجد تابع وحيد مستمر وله مشتق (نظرية الوجود تعني وجود الحل).

- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

- نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$A_0.y^{(n)} + A_1.y^{(n-1)} + A_2.y^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1}.y' + A_n.y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من مراتب عليا ذات أمثال ثابتة.

وإذا كانت الأمثال لهذه المعادلة من الشكل:

$a_0.y^{(n)} + a_1.y^{(n-1)} + \cdots + a_n.y = 0$ حيث $a_i \, ; i = 0, \dots, n$ ثوابت.

- الحلول الخاصة لهذه المعادلة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

نشتق n مرة ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$y' = \lambda . e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \lambda^n . e^{\lambda x}$$

فنحصل على:

$$a_0 . \lambda^n . e^{\lambda x} + a_1 . \lambda^{n-1} . e^{\lambda x} + \cdots + a_n . e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0}$$

تسمّى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال المتجانسة وبالتالي هذه المعادلة المميزة تشكل كثير حدود من الدرجة n في λ فهي تقبل n جذراً لها ونميز عدة حالات:

- الحالة الأولى:

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فنحصل على الحلول الخاصة:

$$y_1 = e^{\lambda_1 . x}, y_2 = e^{\lambda_2 . x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n . x}$$

عدد هذه الحلول هو n وهي مجموعة مستقلة خطياً وبالتالي تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

ويكون الحل العام معطى بالشكل التالي:

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 . x} + c_2 . e^{\lambda_2 . x} + \cdots + c_n . e^{\lambda_n . x}$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ كلها ثوابت.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل

هي معادلة تفاضلية متجانسة لأنها دون طرف ثانٍ.

نفرض أنّ $y = e^{\lambda x}$ حل خاص لها ثمّ نشتق مرتين ونعوض بالمعادلة.

$$y' = \lambda . e^{\lambda x} \, , y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض}} \lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

المعادلة المميزة: $\boxed{\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0}$

جذور المعادلة المميزة هي: $\lambda_1 = 1 \, , \lambda_2 = 2$

فيكون الحل العام من الشكل:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحلبي ورهف النقشي

ستكون يوما ما تريد عندما تؤمن بأن العالم بما فيه ليس أذكى وأقوى منك .. لا تتح الفرصة لأحد بتحطيمك .. كن انت فقط انت

#ساعد غيرك