نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الخامسة عشر   عنوان المحاضرة : المتجهات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-تعريف الاستقلال العشوائي .

2-الأشعة العشوائية الثنائية المستمرة .

3- بعض التمارين .

الاستقلال العشوائي

نقول عن متغيرين عشوائيين X و Y إنهما مستقلان إذا تحقق :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

أي أنَّ : $P(X \le x , Y \le y) = P(X \le x).P(Y \le y)$

أو : $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$

تمرين لتكن $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة للشعاع (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} \quad ; x = 1,2,3 \ ; y = 1,2$$

عين الكثافات الهامشية لكل من X و Y , و هل هما مستقلان أم لا ؟

الحل

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \left(\frac{xy^2}{30}\right) = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{5x}{30} = \frac{x}{6} \quad ; x = 1,2,3$$

إنَّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير X نلاحظ أنَّها لا تتعلق بـ y نهائياً .

للتأكد نلاحظ أنَّ : $\sum_x f_X(x) = \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

إذاً $f_X(x) = \frac{x}{6}$ هي دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير X .

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_{x=1}^{3}\left(\frac{xy^2}{30}\right) = \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{6y^2}{30} = \frac{y^2}{5} \ \ ; y = 1,2$$

إنَّ دالة الكثافة الهامشية للمتغير Y نلاحظ أنّها لا تتعلق بـ x نهائياً .

للتأكد نلاحظ أنَّ : $\sum_y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{2}\left(\frac{y^2}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

إذاً $f_Y\,(y) = \frac{y^2}{5}$ هي دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y .

حتى يكونا مستقلين يجب تحقق الشرط : $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, ولذلك نلاحظ أنَّ :

$$f_X(x).f_Y(y) = \frac{x}{6}.\frac{y^2}{5} = \frac{xy^2}{30} = f_{X,Y}(x,y)$$

و هذا يدل على استقلال المتغيرين X و Y عشوائياً .

الأشعة العشوائية الثنائية المستمرة

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة :

نقول عن الشعاع العشوائي (X,Y) إنَّه مستمر إذا وجدت دالة غير سالبة $f(x,y)$ بحيث يكون من أجل أي عددين حقيقيين x و y :

$$F(x,y) = P(X \le x\,, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v).du.dv$$

عندئذٍ نسمي الدالة $f(x,y)$ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للشعاع العشوائي (X,Y) المستمر و هي تحقق الشرطين التاليين :

1) $f(x,y) \ge 0\,;\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dx.dy = 1$

ونجد أنَّ : $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

أي أنَّ الكثافة المشتركة هي المشتق الثاني لدالة التوزيع مرة بالنسبة لِ x ومرة بالنسبة لِ y .

الكثافات الهامشية في حالة الاستمرار:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dy \quad ; \ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dx$$

تمرين ليكن (X,Y) شعاعاً كثافته المشتركة لها الشكل :

$$f(x,y)=\begin{cases} c(3x+y) & ;1<x<5\,,\ \ 0<y<3 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين قيمة الثابت الحقيقي c .

2) أوجد الكثافات الهامشية .

3) احسب الاحتمالات $P(2<X<4\,,Y>1)$ و $P(Y<2)$

الحل

1) بما أنَّ $f(x,y)$ دالة كثافة مشتركة لِـ (X,Y) فإنَّها تحقق الشرط :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dx.dy=1$$

$$\Rightarrow \int_0^3\int_1^5 c.(3x+y).dx.dy=1 \Rightarrow c\int_0^3\left[\frac{3x^2}{2}+yx\right]_1^5.dy=1$$

$$\Rightarrow c\int_0^3\left[\left(\frac{75}{2}+5y\right)-\left(\frac{3}{2}+y\right)\right].dy=1 \ \Rightarrow c\int_0^3[36+4y].dy=1$$

$$\Rightarrow c[36y+2y^2]_0^3=1 \Rightarrow c(108+18)=1 \Rightarrow 126\,c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{126}$$

فتكون دالة الكثافة المشتركة لِـ X و Y هي :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{126}(3x+y) & ;1<x<5\,,\ \ 0<y<3 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) لدينا :

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dy=\int_0^3\frac{1}{126}(3x+y).dy=\frac{1}{126}\left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{126}\left(9x+\frac{9}{2}\right)$$

ومنه يكون :

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{126}\left(9x+\frac{9}{2}\right) & ;1<x<5 \\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).\,dx = \int_1^5 \frac{1}{126}(3x+y).\,dx = \frac{1}{126}\left[xy + \frac{3x^2}{2}\right]_1^5$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{126}\left[\left(\frac{75}{2}+5y\right) - \left(\frac{3}{2}+y\right)\right] = \frac{1}{126}(36+4y)$$

ومنه يكون :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{126}(36+4y) & ; 0 < y < 3 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

3) لدينا :

$$P(2 < X < 4\,, Y > 1\,) = P(2 < X < 4, 1 < Y < 3)$$

$$= \int_1^3 \int_2^4 \frac{1}{126}(3x+y).\,dx.\,dy = \frac{1}{126}\int_1^3 \left[\frac{3x^2}{2} + yx\right]_2^4.\,dy$$

$$= \frac{1}{126}\int_1^3 [(24+4y) - (6+2y)].\,dy = \frac{2}{126}\int_1^3 [9+y].\,dy$$

$$= \frac{1}{63}\left[9y + \frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{63}\left[\left(27+\frac{9}{2}\right) - \left(9+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{63}[22] = \frac{22}{63}$$

ولدينا : $P(Y < 2) = P(0 < Y < 2) = \int_{-\infty}^{2} f_Y(y).\,dy = \frac{1}{126}\int_0^2 (4y+36).\,dy$

$$= \frac{1}{126}[2y^2 + 36y]_0^2 = \frac{1}{126}(8+72) = \frac{80}{126} = \frac{40}{63}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة

" حين يشاء الله يستبدل أسباباً بأسباب , وحين يشاء الله يغلق باباً ويفتح أبواب ... "