نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄ المحاضرة: الرابعة عشر

عنوان المحاضرة: Derivative

بعض المفردات هامة لفهم النص

Derivative	الاشتقاق	Factor	عامل
Geometrical	هندسي	Cancelled out	اختزال
Mechanical	ميكانيكي	Fraction	كسر
Argument	وسيطي(متحول)	Numerator	بسط
Differentiable	قابلية تفاضل	Denominator	مقام
Slope	ميل -انسحاب	Continuity	استمرار
Tangent	مماس	Monotony	اطراد
Instantaneous velocity	السرعة الآنية	Sufficient	كافي
Acceleration	التسارع	Necessary	لازم
Composite function	الدالة المركبة	Critical	حرجة
Secant	قاطع	Extreme	حدية
Angle	زاوية	Increment	تزايد
Contrary is in valid	العكس غير صحيح	Investigation	دراسة
Consequence	نتيجة	Coordinate	إحداثيات
Decreases	تناقص	Material point	نقطة مادية
Sign	إشارة	Movement	حركة ـتحرّك
item	الحد	Motion law	قانون الحركة
Average	وسطية	Displacement	تغيير المكان- إزاحة

Derivative. Geometrical and mechanical meaning of derivative

Derivative. Argument and function increments. Differentiable fanction

Geometrical meaning of derivative . Slope of a tangent. Tangent equation.

Mechanical meaning of derivative . Instantaneous velocity . Acceleration.

Differential of a function. Properties of derivatives and differentials.

Derivative of a composite function.

Derivative : Consider a function y=f(x) at two points : x_0 and $x_0+\Delta x$:
$f(x_0)$ *and* $f(x_0+\Delta x)$.

Here Δx means some small change of an argument, called an argument increment

Correspondingly a difference between the two values of a function : $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ is called a function increment. Derivative of a function y=f(x) at a point x_0 is the limit:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

If this limit exists , then a function f(x) is a differentiable function at point x_0 .
Derivative of a function f(x) is marked as :

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Geometrical meaning of derivative . Consider a graph of a function y=f(x):

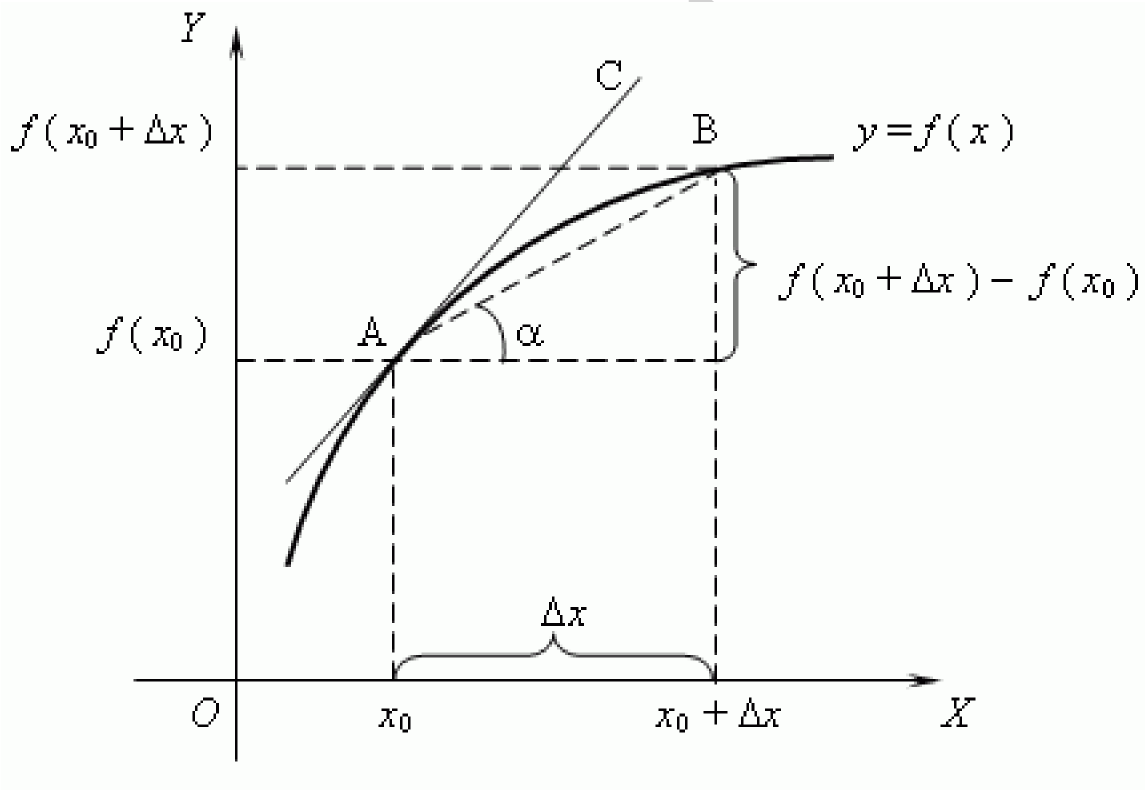


Fig. 1

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=tan\alpha$$

Where α – a slope angle of the secant AB.

So, The difference quotient is equal to a secant slope . If to fix the point A and to move the point B towards A, then Δx will unboundedly decrease and approach 0 , and the secant AB will approach the tangent AC.

Hence , a limit of the difference quotient is equal to a slope of a tangent at point A. Hence it follows : a derivative of a function at a point is a slope of a tangent of this function graph at this point .

Tangent equation Now we'll derive an equation of a tangent of a function graph at a point A$(x_0, f(x_0))$ in general case an equation of a straight line with a slop $f'(x_0)$ has the shape : $y = f'(x_0).x + b$

To find b we'll use the fact , that a tangent line goes through a point A:

$$f(x_0) = f'(x_0).x_0 + b$$

Hence , $b = f(x_0) - f'(x_0).x_0$, and substituting this expression instead of b , we 'll receive the equation of a tangent :

$$y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

Mechanical meaning of derivative . consider the simplest case : a movement of a material point along coordinate line , moreover , the motion law is given , i.e a coordinate x of this moving point is the known function x(t) of time t. During the time interval from t_0 till $t_0 + \Delta t$ the point displacement is equal to : x($t_0 + \Delta t$)-x(t_0)=Δx, and its average velocity is : $v_a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ as $\Delta t \to 0$, then an average velocity value approaches the certain value m which is called an instantaneous velocity v(t_0) of a material point in the moment t_0 . But according the derivative definition we have :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$$

Hence , v(t_0) =$x'(t_0)$, i.e a derivative of a coordinate with respect to time is a velocity . This is a mechanical meaning of a derivative . Analogously to this , an acceleration is a derivative of a velocity with respect to time : a= $v'(t)$

Differential and its relation with derivative

Differential of a function is product of a derivative $f'(x_0)$ and an increment of argument Δx : df=$f'(x_0)\Delta x$

Basic properties of derivatives and differentials

If u(x)=constant , then $u'(x) = 0$, $du = 0$

If u(x) and v(x) differentiable functions at a point x_0 , then :

$$(c\,u)' = c\,u'\ , d(cu) = cdu\ \ , (c = constant)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'\ , d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$(uv)' = uv' + u'v, d(uv) = vdu + udv$$

Derivative of a composite function , Consider a composite function , argument of which is also a function :

h(x)=g(f(x)) . If a function f has a derivative at a point x_0, and a function g has a derivative at a point f(x_0) , then a composite function h has also a derivative at a point x_0 , calculated by the formula :

$$h'(x) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Application of derivative in investigation of functions

Continuity and differentiability of function . Sufficient

Conditions of functions monotony . darboux's theorem.

Intervals of function monotony . Critical point .

Extreme (minimum , maximum) . Points of extreme .

Necessary condition of extreme . Sufficient conditions of extreme.

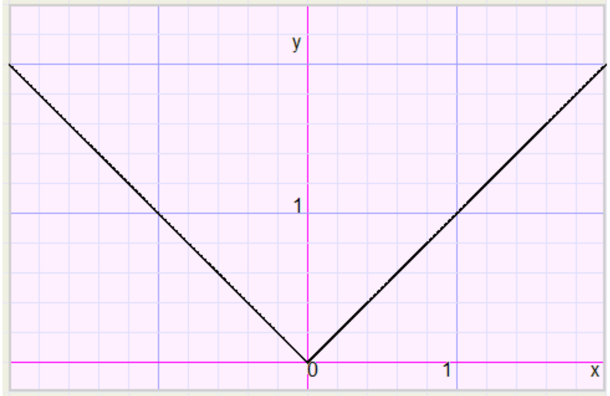
Plan of function investigation.

Relation between continuity and differentiability of function, If a function is differentiable at some point . then it is a continuous function at this point . Contrary is invalid; a continuous function can have no derivative ,

Consequence . If a function is discontinuous at some point ,then it has no derivative in this point.

Example : The function y=|x| (Fig3) is continuous everywhere , but it has no derivative at x=0 , because a tangent of the graph at this point does not exist

Fig3



Sufficient conditions of functions monotony

If $f'(x) > 0$ at every point of an interval (a,b) , then a function f(x) increases within this interval.

If $f'(x) < 0$ at every point of an interval (a,b) , then a function f(x) decreases within this interval.

Darboux's theorem Points , at which a derivative of a function is equal to 0 or doesn't exists , divide a function domain for such intervals that within each of them a derivative saves a constant sign.

Using these signs it is possible to find intervals of monotony of functions , what is very important in investigations of functions

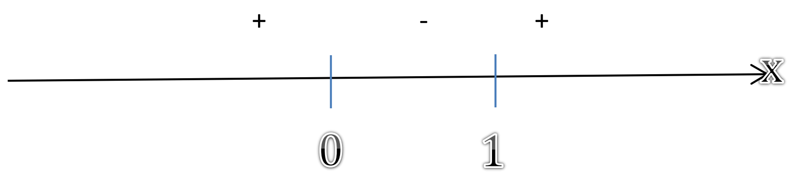
Example : Find intervals of monotony for the function f(x)=$2x + x^{-2}$

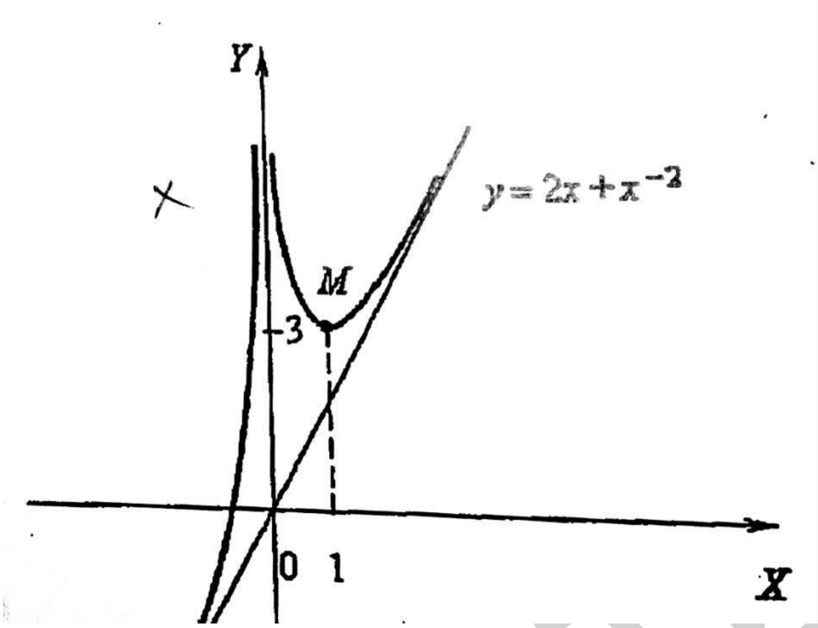
Solution: The function domain is $x \neq 0$; this can be written as union of the intervals ;$(-\infty, 0) and (0, +\infty)$;

$$f'(x) = 2 - x^{-3} \text{ , } hence\ f'(x) = 0\ \ at\ x = 1$$

Point x=0 and x=1 .

Point x=0 and x=1 divide the function domain into the three intervals ; $(-\infty, 0), (0,1), (1, +\infty)$. According to darboux's theorem $f'(x)$ saves a constant sign within of these intervals





Hence , the function increases in the intervals $(-\infty,0)$ *and* $(1,+\infty)$ and decreases in the interval(0,1) . the point x=0 isn't included in the function domain, but as x approaches 0 an item x^{-2} increases unboundedly , therefore the function also increases unboundedly. At the point x=1 the function value is 3 . According to this analysis we can draw the graph of the function.

الترجمة :

الاشتقاق

المعنى الهندسي و الميكانيكي للاشتقاق

الاشتقاق . الزيادة في المتحول (الوسيط) و الدالة

الدوال القابلة للتفاضل. المعنى الهندسي للاشتقاق
ميل المماس. معادلة المماس . المعنى الميكانيكي للاشتقاق
السرعة الآنية . التسارع . تفاضل دالة
خواص الاشتقاق و التفاضل . اشتقاق دالة مركبة

الاشتقاق: لتكن الدالة y=f(x) عند النقطتين $x_0, x_0+\Delta x$ بحيث $f(x_0)$ و $f(x_0+\Delta x)$. هنا Δx تعني التغيير في المتحول و تدعى زيادة المتحول (الوسيط) بالمقابل الاختلاف بين قيمتي الدالة $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ تزايد الدالة.

اشتقاق الدالة $y=f(x)$ عند نقطة x_0 هو النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

-إذا كانت هذه النهاية موجودة عندئذٍ الدالة $f(x)$ هي دالة قابلة للتفاضل . مشتق الدالة $f(x)$ يرمز له بالشكل :

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

-**المعنى الهندسي للمشتق** : ليكن لدينا الخط البياني للدالة $y=f(x)$ حيث α زاوية الميل للقاطع AB . إذاً حاصل قسمة الفروق يساوي ميل القاطع . إذا ثبتنا النقطة A و حركنا النقطة B باتجاه A عندئذٍ Δx متناقص بشكل غير محدود و ستسعى إلى الصفر ، و القاطع AB سيسعى نحو المماس AC و بالتالي نهاية حاصل قسمة الفرق يساوي ميل المماس عند النقطة A و بالتالي هذا يعطي : مشتق الدالة عند نقطة هو ميل المماس للخط البياني لهذه الدالة عند هذه النقطة

-**معادلة المماس :** الآن سنستخرج معادلة المماس من الخط البياني للدالة عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ في الحالة العامة
معادلة خط مستقيم له ميل $f'(x_0)$ لها الشكل $y=f'(x_0)\,.\,x+b$

لإيجاد b سنستخدم المعلومة أن خط المماس يمر من النقطة A :

$$f(x_0)=f'(x_0)x+b$$

- وبالتالي $b=f(x_0)-f'(x_0)x$ و بتعويض هذا التعبير بدلاً من b سنحصل على معادلة المماس :

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

-**المعنى الميكانيكي للاشتقاق :** لنأخذ الحالة الأبسط : حركة نقطة مادية على محور الإحداثيات ، و بالإضافة إلى ذلك ، قانون الحركة المعطى هذا يعني أن الإحداثي x لهذه النقطة المتحركة هي الدالة المعروفة $x(t)$ بالنسبة للزمن . خلال الفترة الزمنية من t_0 و حتى $t_0+\Delta t$ تكون نقطة الإزاحة تساوي $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$ و معدل سرعتها هو :

$$v_a=\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \text{عندما}\ \Delta t\to 0$$

-عندئذٍ قيمة معدل السرعة تسعى لقيمة معينة و التي تدعى السرعة الآنية $v(t_0)$ لنقطة مادية في اللحظة t_0 و لكن وفقاً لتعريف الاشتقاق يكون لدينا :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=x'(t_0)$$

و بالتالي $v(t_0)=x'(t_0)$ و الذي يعني أن مشتق الفواصل بالنسبة للزمن هو السرعة بالنسبة للزمن $a=v'(t)$

هذا هو المعنى المكيكانيكي للمشتق.

-**التفاضل و علاقته بالاشتقاق :**

تفاضل دالة : هو جداء المشتق $f'(x_0)$ و التغير في المتحول Δx

$$df=f'(x_0)\Delta x$$

-**الخصائص الأساسية للاشتقاق و التفاضل :** إذا كان $u(x)$ تابع ثابت عندئذٍ $du=0$ و $u'(x)=0$

إذا كانت $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ و $v(x)$ توابع قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 عندئذٍ :

$$(c\,u)' = c\,u'\,, d(cu) = cdu\ \ ,(c = \text{ثابت})$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'\,, d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$(uv)' = uv' + u'v, d(uv) = vdu + udv$$

-اشتقاق الدالة المركبة : لتكن الدالة المركبة و التي متحولها أيضاً هو دالة : $h(x) = g\big(f(x)\big)$

إذا كانت الدالة f لها مشتق عند النقطة x_0 و الدالة g لها مشتق عند النقطة $f(x_0)$ عندئذٍ الدالة المركبة h لها مشتق أيضاً عند x_0 و نحسبه وفق الصيغة $h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$

تطبيق الاشتقاق في دراسة الدوال

الاستمرار و قابلية التفاضل للدوال

الشروط الكافية لاطراد الدوال

نظرية داربوكس

مجال اطراد دالة

النقطة الحرجة

الحدية (الدنيا و العظمى)

الشروط اللازمة للحدية

الشروط الكافية للحدية

العلاقة بين استمرار دالة و قابلية اشتقاقها :

إذا كانت الدالة قابلة للتفاضل عند نقطة ما عندئذٍ تكون الدالة مستمرة عند هذه النقطة . العكس غير صحيح : الدالة المستمرة من الممكن أن لا يكون لها مشتق .

نتيجة: إذا كانت دالة غير مستمرة عند نقطة ما عندئذٍ لا يوجد لها مشتق عن هذه النقطة .

مثال : الدالة $y = |x|$ (الشكل ٣) مستمرة في كل مكان و لكن ليس لها مشتق عند النقطة $x=0$ لأن المماس للخط البياني عند هذه النقطة ليس موجوداً ((انظر الشكل رقم٣ في النص))

-الشروط الكافية لاطراد الدوال :

إذا كان $\mathrm{f}'(x) > 0$ عند كل نقطة من المجال (a, b) عندئذٍ الدالة $f(x)$ متزايدة ضمن هذا المجال.

إذا كان $\mathrm{f}'(x) < 0$ عند كل نقطة من المجال (a, b) عندئذٍ الدالة $f(x)$ متناقصة ضمن هذا المجال.

-نظرية داربوكس :

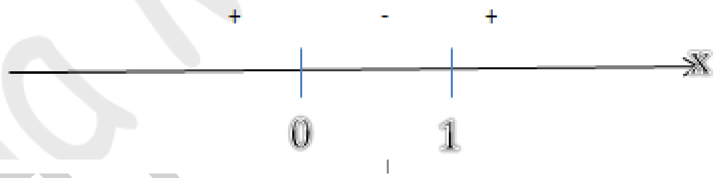
النقاط التي يكون عندها مشتق الدالة يساوي الصفر أو غير موجود، تقسم مجال تعريف الدالة إلى مجالات بحيث يكون المشتق في كل منها يحافظ على إشارة ثابتة.

-استخدام هذه الإشارات يمكننا من إيجاد مجالات اطراد الدوال و الذي يكون مهم جداً في دراسة الدالة .

مثال: أوجد مجالات اطراد الدالة $f(x) = 2x + x^{-2}$

الحل: مجال الدالة $x \neq 0$ و هذا يمكن كتابته كاجتماع للمجالين $(0, +\infty)$و$(-\infty, 0)$ و $f'(x) = 2 - 2x^{-3}$ و يكون $f'(x) = 0$ إذا $x=1$

و حسب نظرية داربوكس $f(x)$ يحافظ على إشارة ثابتة ضمن كل من هذه المجالات :



و بالتالي تتزايد الدالة في المجال $(-\infty, 0)$ و $(1, +\infty)$ و تتناقص في المجال $(0,1)$. النقطة $x=0$ غير مضمّنة في مجال الدالة و لكن عندما x تسعى إلى الصفر فإن الحد x^{-2} يتناقص بشكل غير محدود ، بالإضافة إلى ذلك إن الدالة تتزايد أيضاً بشكل غير محدود ، عند النقطة $x = 1$ ، قيمة الدالة هي ٣ و فقاً لهذه التحليلات يمكننا رسم بيان الدالة .

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي