2017/11/12 أح

المحاضرة الثانية عشر

- $(\mathbb{R}, \tau_1)$ $\quad \tau_1 = \tau_{]a,b[}$ غير متراص
- $(\mathbb{R}, \tau_2)$ $\quad \tau_2 = \tau_{]a,b]}$ أثبت أنه غير متراص

لدينا ، $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, +n]$ وهذه تغطية مفتوحة $\{]-n, n]\}$

وأي جماعة جزئية منتهية من هذه التغطية ليست تغطية لـ $\mathbb{R}$ لأن

$\forall N, \bigcup_{n=1}^{N}]-n, n] \neq \mathbb{R}$

إذاً هو غير متراص.

- $(\mathbb{R}, \tau_3)$ $\quad \tau_3 = \tau_{[a,b[}$ غير متراص برهانه بنفس الأسلوب

- $(\mathbb{R}, \tau_{[a,\infty[})$ $\quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, \infty[$

- $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ فهنا متراص T_1 وليس T_2. **(هامة)** دائماً مترابطة

$\{O_\alpha\}_{\alpha \in L}$ تغطية مفتوحة لـ $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \cup \{O_\alpha\}_{\alpha \in L}$

$5 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ O_{\alpha_0} : 5 \in O_{\alpha_0}$

$O_{\alpha_0}^c = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad : \exists\ O_{\alpha_1} \quad ; \quad x_1 \in O_{\alpha_1}$

$x_2 \in \mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in L} O_\alpha$

$\exists\ O_{\alpha_2} : x_2 \in O_{\alpha_2}$

$\vdots$

$x_n \in \mathbb{R}$

$\exists\ O_{\alpha_n} : x_n \in O_{\alpha_n}$

$\mathbb{R} = O_{\alpha_0} \cup O_{\alpha_1} \dots \cup O_{\alpha_n}$

إذن (R, τ_{cf}) متراصة.

T_1 لأن: $\{x\}^c = \underbrace{R \setminus \{x\}}_{\text{مفتوحة}}$

مغلقة $(\{x\}^c)^c = \{x\}$

ليس T_2 لأن: $\theta_{x_1} \neq \phi \;,\; \theta_{x_2} \neq \phi$

$\theta_{x_1} \cap \theta_{x_2} \neq \phi$

- متراص $+ T_2 \Rightarrow T_4$

سنستخدم هذا التعريف لـ T_4 $\quad \forall A, B \quad \theta_A \cap \theta_B = \phi$

A , B متراصتان

$x \in A \qquad B$

جوار لـ B θ_B^x مفتوح $\qquad$ θ_x جوار لـ x مفتوح

$\theta_x \cap \theta_B = \phi$

$A \subseteq \bigcup_{x \in A} \theta_x$, A متراصة

$\exists\; x_1 \ldots x_n \in A$

$A \subseteq \theta_{x_1} \cup \ldots \cup \theta_{x_n} = \theta_A$

$B \subseteq \underbrace{\theta_B^{x_1} \cap \ldots \cap \theta_B^{x_n}}_{\text{تقاطع منته لمفتوحات مفتوحة}} = \theta_B$

$\theta_A \cap \theta_B = \phi$

$\Leftarrow T_4$

- التعريف الأول للفضاء T_4

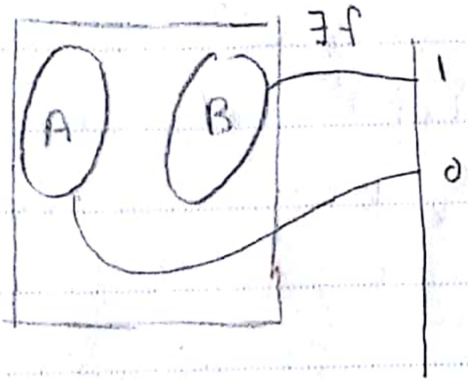
$\forall A, B \; : \exists\, \theta_A, \exists\, \theta_B : \theta_A \cap \theta_B = \phi$

المغلقتان والمنفصلتان

التعريف الثاني للفضاء T_4:

التعريف الثالث للفضاء T_4:

يمكننا إيجاد تابع مستمر قيمته على A صفر وقيمته على B واحد



Let A, B ----

$\exists f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in A \Rightarrow f(x) = 0$ $x \in B \Rightarrow f(x) = 1$

$\{x : f(x) < \frac{1}{2}\} = \{x : f(x) \in]-\infty, \frac{1}{2}[\} = f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[) = O_A$

$x \in A \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in O_A$

ثم لنأخذ

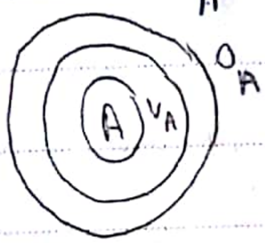
$\{x : f(x) > \frac{1}{2}\} = \{x : f(x) \in]\frac{1}{2}, \infty[\} = f^{-1}(]\frac{1}{2}, \infty[) = O_B$

$x \in B \Rightarrow f(x) = 1 \in O_B$

التعريف الثاني للفضاء T_4:

$\forall A$ $\forall O_A$ $\exists V_A : A \subseteq V_A \subseteq \overline{V}_A \subseteq O_A$

المغلقة



التعريف الرابع للفضاء T_4: (مبرهنة تيتسي في التمديد)

$\forall$

$A \subseteq X \xrightarrow{\text{ومستمر}} \mathbb{R}$

مغلقة

$x \longrightarrow f(x)$

$\exists f$ يوجد g

$X \longrightarrow R$

$\forall x \in A : g(x) = f(x)$