نظري

◄ دكتور المادة: حزة الحاكمي

◄ المحاضرة: السابعةعشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء الخارجي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الزمرة الجزئية المتميزة وخواصها.

٢ ـ سوف نبدأ ببحث جديد: الجداء الخارجي للزمر.

٣ ـ خواص الجداء الخارجي وأمثلة عنه.

تمهيدية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشرط الازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G هو أن يتحقق: $\forall f \epsilon Inn(G);\ \ f(H)=H$.

الاثبات :

◄لزوم الشرط : لنفرض أن H ناظمية في G وليكن f تماثل داخلي أي $f \in Inn(G)$ عندئذ:

$$f=Ta : a\in G$$

$$\Rightarrow \forall h\ \in H\quad ;\quad f(h)=Ta(h)=a.h.a^{-1}\in a.H.a^{-1}\subseteq H$$

ومنه :

$$f(H)\subseteq H \dots (1)$$

- هذا الاحتواء لأجل كل تماثل داخلي.
- مجموعة الاحتواء زمرة جزئية في زمرة كل التماثلات ⇐ لكل عنصر فيها مقلوب وطالما هذا الاحتواء صحيح لكل f فهو صحيح لأجل مقلوب f ⇐ أي :

$f^{-1}\epsilon Inn(G)$ فإن: $f^{-1}(H)\subseteq H\Rightarrow f\left(f^{-1}(H)\right)\subseteq f(H)$

$$\text{(طالما المقلوب تماثل)}\Rightarrow H\subseteq f(H)\ \dots .(2)$$

من الاحتواءين نجد: $f(H)=H$

◄كفاية الشرط : لنفرض ان : $\forall f\in Inn(G)\ \ ;\ \ f(H)=H$ ولنبرهن أن $\forall a\in G\ ; a.H.a^{-1}\subseteq H$ أي ان H ناظمية في G .

ليكن $y \in a.H.a^{-1}$ فإن $y = a.h.a^{-1} \quad : \quad h \in H$

$= T_a(h) \in T_a(H) = H$

ومنه $a.H.a^{-1} \subseteq H$

وبالتالي H زمرة جزئية ناظمية في G .

سندرس الزمر التي صورتها هي نفسها في أي تماثل.

الزمر الجزئية المتميزة:

تعريف: لتكن G زمرة و k زمرة جزئية في G نقول ان k متميزة في G إذا كان :

$$\forall f \in Aut(G)\,;\ \ f(k) = k$$

أي ان مفهوم الزمرة المتميزة ما هو الا تعميم لمفهوم الزمرة الناظمية ويبين انه توجد علاقة هامو بين الزمر الجزئية لزمرة وبين زمرة التماثلات لهذه الزمرة.

ينتج من التعريف : ١- ان كل من $< e >, < G >$ هي زمرة جزئية متميزة في G.

٢- كل زمرة جزئية متميزة في زمرة G تكون ناظمية في G .

- **خواص الزمر الجزئية المتميزة :**
- **تمرين:**

لتكن G زمرة اثبت ان $Z(G)$ زمرة جزئية متميزة في G.

الحل:

لدينا : $Z(G) = \{a : a \in G\,, ax = xa\,;\ \forall x \in G\}$

زمرة جزئية في G ولنبرهن أن: $\forall f \in Aut(G)\ \ ;\ \ f\big(Z(G)\big) = Z(G)$

ليكن $y \in Z(G)$ ولنبرهن أن $f(y) \in Z(G)$

ليكن $x \in G$ ، $f \in Aut(G)$ بما ان $f(G) = G$ لانه تماثل عندئذٍ

$\exists x_0 \in G : x = f(x_0)$

ولنبرهن على ان : $x.f(y) = f(y).x$

$$x.f(y) = f(x_0).f(y) = f(x_0.y) = f(y.x_0) = f(y).f(x_0)x$$

ومنه $f(y) \in Z(G)$ أي ان $f\big(z(G)\big) \subseteq Z(G)$

لما كان $f \in Aut(G)$ فإن $f^{-1} \in Aut(G)$

وطالما هذا الاحتواء صحيح لأجل كل f فهو صحيح لاجل المقلوب وطالما f تطبيق نأخذ الصورة المباشرة له . وبالتالي فإن : $f^{-1}\big(z(G)\big) \subseteq Z(G)$

ومنه $f\Big(f^{-1}\big(z(G)\big)\Big) \subseteq f\big(z(G)\big)$

$\Leftarrow$ $f\big(z(G)\big) = z(G)$ أي الزمرة الجزئية $z(G)$ متغيرة في G

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذ: ١) كل زمرة جزئية متميزة في G تكون ناظمية في G

٢) H,k زمر جزئية في G بحيث $H \subseteq k$: اذا كانت Hمتميزة في G و k متميزة في H فإن k متميزة في G .

البرهان:

١) لتكن k زمرة جزئية متميزة في G عندئذٍ لأجل : $f \in Aut(G), f(K) = k$

وبالتالي أيا كان $T_a \in Inn(G)$ فإن $T_a \in Aut(G); T_a(K) = K$ فهي ناظمية في G حسب المبرهنة السابقة.

٢) لنفرض ان H متميزة في G عندئذٍ:

$$1)\ \ f \in Aut(G)\,;\ \ f(H) = H$$

وان k متميزة في H عندئذٍ:

$$2)\ \forall g \in Aut(H)\,;\ \ f(k) = k$$

ولنبرهن أن $\forall f \in Aut(G)\,;\ \ f(k) = k$

- ليكن $f \in Aut(G)$ عندئذٍ: $G \longrightarrow G$: f تطبيق وتشاكل ومتباين وغامر.
- ولنفرض أن : $f_0\ : H \longrightarrow G$
هو مقصور f على H . تطبيق ومتباين ومتشاكل لكن ليس تماثل.
وحسب الفرض: $f_0(H) = f(H) = H$ أي أن :

$f_0 \ : H \longrightarrow H$ هو تماثل للزمرة H (صغرنا المستقر فأصبح غامر)وبالتالي : $f_0 \in Aut(H)$

ولما كانت k متميزة في H نجد ان : $f_0(k) = k$

$$\Rightarrow f(k) = f_0(k) = k$$

وبالتالي k متميزة في G .

سوف نبدأ ببحث جديد وهو الجداء الخارجي للزمر

تمهيدية : لتكن G_1, G_2 زمرتين لنأخذ المجموعة :

$$G_1 \oplus G_2 = \{(g_1, g_2) : \ g_1 \in G_1 \ , \quad g_2 \in G_2 \ \}$$

غير خالية ،ولنعرف على المجموعة عملية (.) بالشكل الاتي :

$$\forall \ (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \oplus G_2$$

فإن : $$; (a_1, a_2).(b_1, b_2) = (a_1 \underset{G_1 \text{معرف على}}{\cdot} b_1 \ , a_2 \underset{G_2 \text{معرف على}}{\cdot} b_2 \ )$$

إن الثنائية $((G_1 \oplus G_2),\cdot)$ تشكل زمرة والعنصر المحايد فيها هو (e_1, e_2) ومقلوب $(a \ \ , b)$ هو:

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$$

نسمي الزمرة $G_1 \oplus G_2$ زمرة الجداء المباشر للزمرتين G_1, G_2

حيث $\oplus$ جداء ديكارتي و $\cdot$ جداء داخلي (عملية) ((البرهان وظيفة))

أمثلة:

١) لنأخذ الزمرتين $U(8), U(10)$ اوجد $U(8) \oplus U(10)$.

$$U(8) = \{1,3,5,7\}$$

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

$$U(8) \oplus U(10) = \{(1,1), (1,3), (1,7), (1,9), (3,1), (3,3), (3,7), (3,9),$$
$$(5,1), (5,3), (5,7), (5,9), (7,1), (7,3), (7,7), (7,9)\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(1,1)$ وان:

$$(1,3)^{-1} = (1^{-1}, 3^{-1}) = (1,7)$$

$$(5,9)^{-1} = (5^{-1}, 9^{-1}) = (5,9)$$

٢) اوجد $U(8) \oplus Z_3$ (زمرة ضربية وزمرة جمعية)

$$U(8) = \{1,3,5,7\}$$
$$Z_3 = \{0,1,2\}$$
$$U(8)\oplus Z_3 = \left\{\begin{matrix}(1,0),(1,1),(1,2),(3,0),(3,1),(3,2),(5,0),(5,1)\\ ,(5,2),(7,0),(7,1),(7,2)\end{matrix}\right\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(1,0)$

وأن $(3,1)^{-1} = (3^{-1},1^{-1}) = (3^{-1},-1) = (3,2)$

$$(5,2)^{-1} = (5^{-1},2^{-1}) = (5^{-1},-2) = (5,2)$$

- الزمرة الأولى ضربية لها مقلوب ، أما الثانية جمعية نأخذ نظير.

٣) اوجد $Z_2\oplus Z_3$ (زمرتين جمعيتين)

$Z_2 = \{0,1\}$ و $Z_3 = \{0,1,2\}$

$$Z_2\oplus Z_3 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

نجد ان العنصر المحايد هو $(0,0)$ وإن :

$$(0,1)^{-1} = (0^{-1},1^{-1}) = (-0,-1) = (0,2)$$
$$(1,2)^{-1} = (1^{-1},2^{-1}) = (-1,-2) = (1,1)$$

دراسة خواص الجداء المباشر للزمر:

مبرهنة: لتكن G_1, G_2 زمرتين عندئذ :

١) $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$

٢) $Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2)$

الاثبات :

١) لنعرف العلاقة : $f : G_1 \oplus G_2 \to G_2 \oplus G_1$ بالشكل التالي :

$$\forall (a,b) \in G_1 \oplus G_2 \ ; \ f(a,b) = (b,a)$$

إن العلاقة f هي تطبيق متباين لآنه :

$$\forall \ (a,b),(a_1,b_1) \in G_1 \oplus G_2$$

لو فرضنا $(a,b) = (a_1,b_1)$:

$$\Leftrightarrow a = a_1 \quad , \quad b = b_1$$

$$\Rightarrow (b,a) = (b_1,a_1) \in G_2\oplus G_1 \Rightarrow f\big((a,b)\big) = f\big((a_1,b_1)\big)$$

ومنه f تطبيق متباين .

و f تشاكل لأن :

$$f[(a\ \ ,b).(a_1,b_1)] = f\big((a.a_1,b.b_1)\big)$$

حسب تعريف الجداء

$$\overset{\text{حسب تعريف الجداء}}{\equiv}\quad (b.b_1\ ,a\ \ .a_1) = (b,a).(b_1,a_1) = f\big((a,b)\big).f\big((a_1,b_1)\big)$$

وهو أيضا غامر لان :

$$\forall c,d\ \epsilon\ G_2 \oplus G_1\ \ ;\ \ c\ \epsilon\ G_2\ ,\ \ d\ \epsilon\ G_1$$

بالتالي: $(d,c\ )\epsilon\ G_1 \oplus G_2$

$$\Rightarrow f(d,c) = (c,d)$$

ومما سبق نجد أن f تماثل .

٢) ليكن $(a,b)\epsilon\ Z(G_1 \oplus G_2)$

لنثبت ان : $a \in Z(G_1)\ ,\ b \in Z(G_2)$

ليكن $x \in G_1$ لنبرهن ان $ax = xa$

ليكن $y \in G_2$ لنبرهن ان $by = yb$

ليكن $x \in G_1\ \ ,\ \ y \in G_2$ إن :

$$(x,y) \in G_1 \oplus G_2 \Rightarrow (a,b)(x,y) = (x,y)(a,b)$$

(a,b) ينتمي للمركز فهو متبادل مع العناصر

$$\Rightarrow (a.x,b.y) = (xa,yb)$$

$$\Rightarrow ax = xa\ \ ,\ \ by = yb \Rightarrow a \in Z(G_1), b \in Z(G_2)$$

$$\Rightarrow (a,b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$$

$$\Rightarrow Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2)\ ....(1)$$

لنثبت الاحتواء المعاكس:

ليكن $(s,t) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ عندئذٍ :

$$\forall (x,y) \in G_1 \oplus G_2\,;(s,t)(x,y) = (sx,ty)$$

$$= (xs,yt) = (x,y).(s,t) \Rightarrow (s,t) \in Z(G_1 \oplus G_2)$$

$$\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2)\ .....(2)$$

من الاحتواءين : $\Rightarrow Z(G_1) \oplus Z(G_2) = Z(G_1 \oplus G_2)$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج