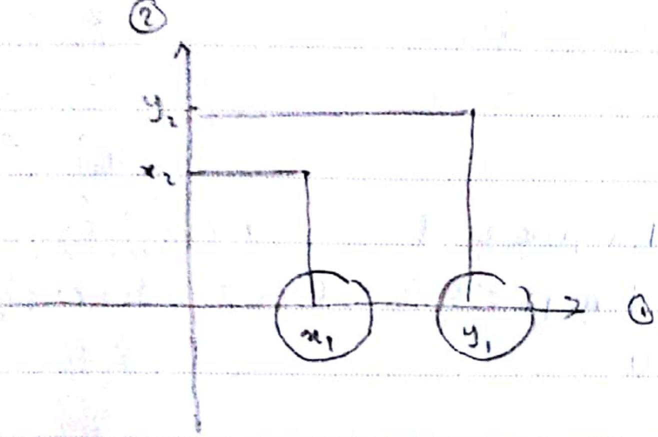
2017 / 11 / 15 أ د   المحاضرة الثالثة عشر

- (X_1, τ_1) هو فضاء T_1 ، (X_2, τ_2) هو فضاء T_1

نريد أن نبرهن (X, τ) هو T_1 حيث (X, τ) هو فضاء الجداء

- (X_1, τ_1) هو فضاء T_2 ، (X_2, τ_2) هو فضاء T_2

نريد أن نبرهن (X, τ) هو فضاء T_2



$x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$x \neq y$ $x_1 \neq y_1$ or $x_2 \neq y_2$

نأخذ $x_1 \neq y_1$

$V_x = \overset{\text{شريط}}{\Theta_{x_1}} \times X_2$

$V_y = \overset{\text{شريط}}{O_{y_1}} \times X_2$

$V_x \cap V_y = \phi$ لأن $\phi = \Theta_{y_1} \cap \Theta_{x_1}$

نأخذ $x_2 \neq y_2$

$W_x = X_1 \times \Theta_{x_2}$

$W_y = X_1 \times \Theta_{y_2}$

$W_x \cap W_y = \phi$

- هات تعريفين للـ T_3:

التعريف الأول لـ T_3: مهما تكن المجموعة المغلقة F ومهما تكن $x \in X$ وحيث $x \notin F$

فيمكن فصلهما طبولوجياً أي $\exists \Theta_F, \exists \Theta_x : \Theta_F \cap \Theta_x = \phi$

التعريف الثاني لـ T_3: مهما تكن $x \in X$ ومهما يكن U_x فتوجد جوار آخر لـ x
بحيث يكون $V_x \subseteq \bar{V}_x \subseteq U_x$

- كل فضاء متري هو فضاء T_3.

حسب التعريف الثاني. (X, d)

$U = N(x, \varepsilon)$

$V = N(x, \frac{\varepsilon}{2})$

نلاحظ أن $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

$U = N(x, \varepsilon) = \{y \in X ; d(x,y) < \varepsilon\}$

كرة مغلقة

$V = N(x, \frac{\varepsilon}{20}) = \{y \in X ; d(x,y) < \frac{\varepsilon}{20}\} \subseteq \{z \in X ; d(x,z) \le \frac{\varepsilon}{20}\}$

$\bar{V} \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{20}) \subseteq U$

المحاضرة الرابعة عشر — الأحد 19 / 11 / 2017

تمرين: لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$
ولنأخذ الصف S من المجموعات الجزئية منها

$S = \{\phi, N, \{0,1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}, \ldots\}$

1. هل تشكل S توبولوجيا على N؟ أثبت أنها تشكل قاعدة لتوبولوجيا على N وعين هذه التوبولوجيا.
2. لنأخذ المجموعة $A \subseteq N$ حيث $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ هل A مفتوحة؟ مغلقة؟ أوجد A° و $\bar{A}$
3. $B \subseteq N$ حيث $B = \{0,1,2,3,4\}$ هل B مفتوحة؟ مغلقة؟ أوجد B° ، $\bar{B}$
4. $E = \{13 \text{ قواسم الـ}\}$ و $D = \{2, 7, 9, 10, 11\}$ ، $F = \{343 \text{ قواسم}\}$
أوجد E° ، $\bar{E}$ ، D° ، $\bar{D}$ ، F° ، $\bar{F}$
5. هل الفضاء التوبولوجي (N, τ) حيث τ التوبولوجيا $\tau(S)$ هو فضاء مترابط؟
6. هل هو متراص؟
7. " " فضاء T_1؟

الحل:

Scanned by CamScanner

1. S لا تشكل تبولوجيا على N وذلك لأنها غير مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي (و بالتالي بالنسبة للاجتماع غير المنتهي أيضاً).

لكن S تشكل قاعدة لتبولوجيا على N وذلك لأنها مغلقة بالنسبة للتقاطع.

نرمز للتبولوجيا المولدة بـ S بالرمز $\tau(S)$ عندها:

اتحاد لعناصر من S $= \theta \iff \theta \in \tau(S) = \tau$

2- نلاحظ أن $A^\circ = A = \{0,1,2,3,4,5\}$ ومنه A مفتوحة.

و $\bar{A} = A$ ، A مغلقة

A مغلقة و مفتوحة في آن واحد

$D^\circ = \{9,10,11\}$ $\qquad \bar{D} = \{\underbrace{2,7,9,11}_{D}, \underbrace{0,1}_{\text{عناصر الجوارات الأساسية لـ 2}}, \underbrace{6,8}_{\text{عناصر الجوار الأساسية لـ 7}}\}$

نلاحظ أن 3 ، 4 ، 5 لكل منها الجوار $\{3,4,5\}$ الذي لا يلاقي D

D ليست مغلقة و لا مفتوحة

3- $\bar{B} = \{0,1,2,3,4,5\}$ $\qquad B^\circ = \{0,1,2\}$

B ليست مفتوحة و لا مغلقة.

4- 133 = جداء عددين أوليين إذن: $E = \{1,7,19,133\}$

فليس له قواسم غيرها.

$E^\circ = \phi$ $\qquad F$

$\bar{E} = \{1,7,19,133$

$0,6,8,132$ ← عناصر الجوارات الأساسية

$2,8,20,134\}$ لعناصر E

إذن $F = \{1,7,49,343\}$

$F^\circ = \phi$

$\bar{F} = \{1,7,49,343$

$0,6,48,342$

$2,8,50,344\}$

5- إذن (N,τ) ليس فضاء مترابطاً وذلك لوجود مجموعة على الأقل (مثل A التي تكلمنا عنها في الطلب الثاني) تختلف عن N و ϕ ولكنها مغلقة ومفتوحة في آن معاً. (وواقعاً إن عدد المجموعات المغلقة والمفتوحة بالنسبة لهذه التبولوجيا لا نهائي)

6- إن (N,τ) ليس متراص
لنأخذ الجماعة من المجموعات A_α حيث ... $A_1=\{3,4,5\}$ و $A_0=\{0,1,2\}$ نلاحظ أن
$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ N حيث $N=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ لكن أي جماعة جزئية
منتهية من هذه التغطية لم تشكل تغطية لـ N

7- إن (N,τ) لا يشكل فضاء T_1 والسبب
لنأخذ المجموعة $Y=\{1\}$ ونلاحظ أن $\bar{Y}=\{0,1,2\}$ أي أن $\bar{Y}\neq Y$ أي Y ليست
مغلقة.
استنتجنا إيجاد مجموعة وحيدة العنصر في N لكنها ليست مغلقة بالنسبة لـ τ على (N,τ)
وبالتالي (N,τ) ليست فضاء T_1.

ملاحظة: تسمى عناصر قاعدة التبولوجيا مجموعات أساسية وأيضاً جوارات أساسية
(لنقاطها).

(مبرهنة تيخونوف): جداء أي فضائين متراصين فضاء متراص.
تذكرة قبل البدء بالبرهان:
* إذا كان (X,τ_1) و (X,τ_2) فضائين تبولوجيين وكان $X=X_1\times X_2$ فإن تبولوجيا
الجداء على X هي تلك التبولوجيا τ التي تقبل β قاعدة لها
حيث:
$$\beta=\tau_1\wedge\tau_2=\{\theta_1\times\theta_2 : \theta_i\in\tau_i\}$$
* إذا كانت f مرشحة على X
$$\text{مرشحة } f_1' = Pr_1(f) = \{Pr_1(A) : A\in f\}$$
$$f_2' = Pr_2(f) = \{Pr_2(A) : A\in f\}$$
$$f \longrightarrow x=(x_1,x_2)$$
$$f_1 \longrightarrow x_1$$
$$f_2 \longrightarrow x_2$$
* مبرهنة التراص والمرشحات الأعظمية.

كل مرشحة أعظمية في فضاء متراص تكون متقاربة فيه. كما أن العكس صحيح

* صورة مرشحة أعظمية وفق تطبيق غامر هي مرشحة أعظمية.
* توابع الإسقاط Pr_i هي توابع غامرة.

برهان تيخونوف:

الفرض: (X_1,τ_1) فضاء تبولوجي و (X_2,τ_2) فضاء تبولوجي و (X,τ) فضاء الجداء لهما

X_1 متراص ، X_2 متراص

الطلب: X متراص

فكرة البرهان (سنأخذ مرشحة أعظمية في X ونثبت تقاربها فيه)

الإثبات: لتكن f_1 صورة f وفق تابع الإسقاط الأول Pr_1 وهو غامر

f_2 " " " " الثاني Pr_2 " "

إذن f_1 مرشحة أعظمية (اعتماداً على مبرهنة سابقة)

f_2 " " " " " "

بما أن X_1 متراص فيوجد $x_1 \in X_1$ حيث $f_1 \to x_1$

X_2 " " $x_2 \in X_2$, $f_2 \to x_2$

وبالتالي $f \to x = (x_1, x_2)$