

25/10/2017

المحاضرة السابعة والثامنة

استخدام تطبيقات نظرية البيان لكل جملة معادلات

منظية

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \Rightarrow x_i = \frac{(b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n)}{a_{ii}}$$

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \quad (*)$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$AX = B$$

من المعادلات (\*)

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{k,i-1}x_{i-1} + a_{ki}x_i + a_{k,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

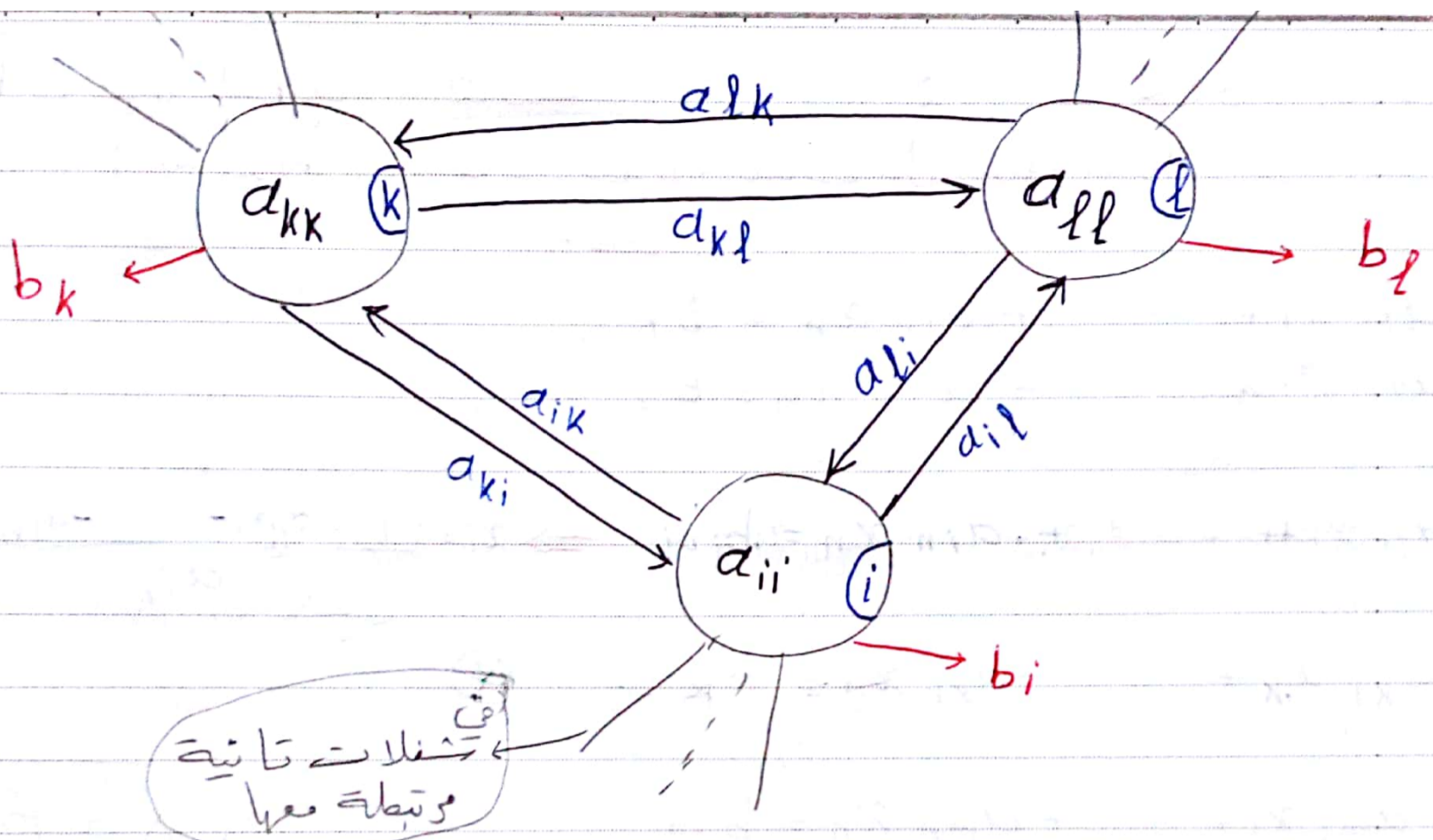
$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{k,i-1}x_{i-1} + a_{ki} \left[ \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n}{a_{ii}} \right] +$$

$$+ a_{k,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

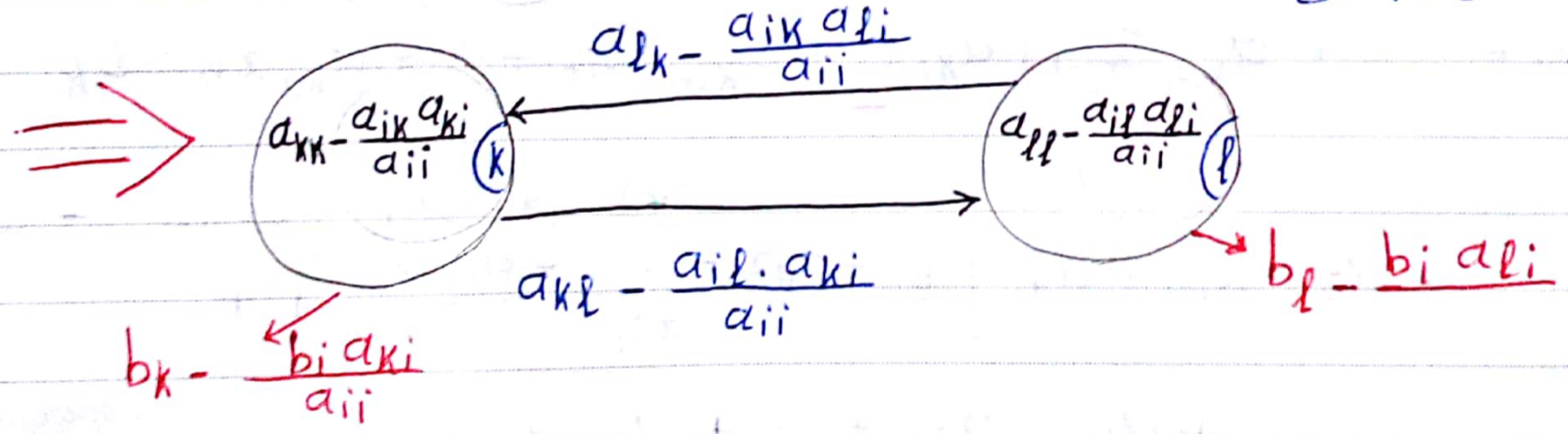
نخرج الجاهل عوامل مشتركة أي:  $(x_1, \dots, x_n)$

$$\left( a_{k1} - \frac{a_{ki} a_{i1}}{a_{ii}} \right) x_1 + \left( a_{k2} - \frac{a_{ki} a_{i2}}{a_{ii}} \right) x_2 + \dots + \left( a_{k,i-1} - \frac{a_{ki} a_{i,i-1}}{a_{ii}} \right) x_{i-1}$$

$$+ \left( a_{k,i+1} - \frac{a_{ki} a_{i,i+1}}{a_{ii}} \right) x_{i+1} + \dots + \left( a_{kn} - \frac{a_{ki} a_{in}}{a_{ii}} \right) x_n = b_k + \frac{a_{ki} b_i}{a_{ii}}$$



- مثلت أقواس وجاهيد وكل عقدة كيف اشتغلت  
 - تقوم بد بح العقد



- ونكرر هذه العملية حتى نصل على البيان المنخفض الذي يحوي عقدة واحدة  
 - وبشكل تراجمي من آخر بيان نصل على بقية قيم هذه الجاهيل

$$x_i = \frac{(b_i - a_{ij}x_j - \dots - a_{in}x_n)}{a_{ii}}$$

$$\left( a_{k1} - \frac{a_{k1} a_{i1}}{a_{ii}} \right) x_1 + \left( a_{k2} - \frac{a_{k2} a_{i2}}{a_{ii}} \right) x_2 + \dots$$

$$\dots + \left( a_{kk} - \frac{a_{ki} a_{ik}}{a_{ii}} \right) x_k + \dots + \left( a_{kl} - \frac{a_{kl} a_{il}}{a_{ii}} \right) x_l + \dots$$

$$\dots = b_k - \frac{b_i a_{ki}}{a_{ii}}$$

**مثال:** أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام تطبيقات نظرية البيان:

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5 \quad (1)$$

$$2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8 \quad (2)$$

$$-x_1 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -4 \quad (3)$$

$$-3x_1 - x_2 + 3x_4 = 6 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_5 = 7 \quad (5)$$

الحل:

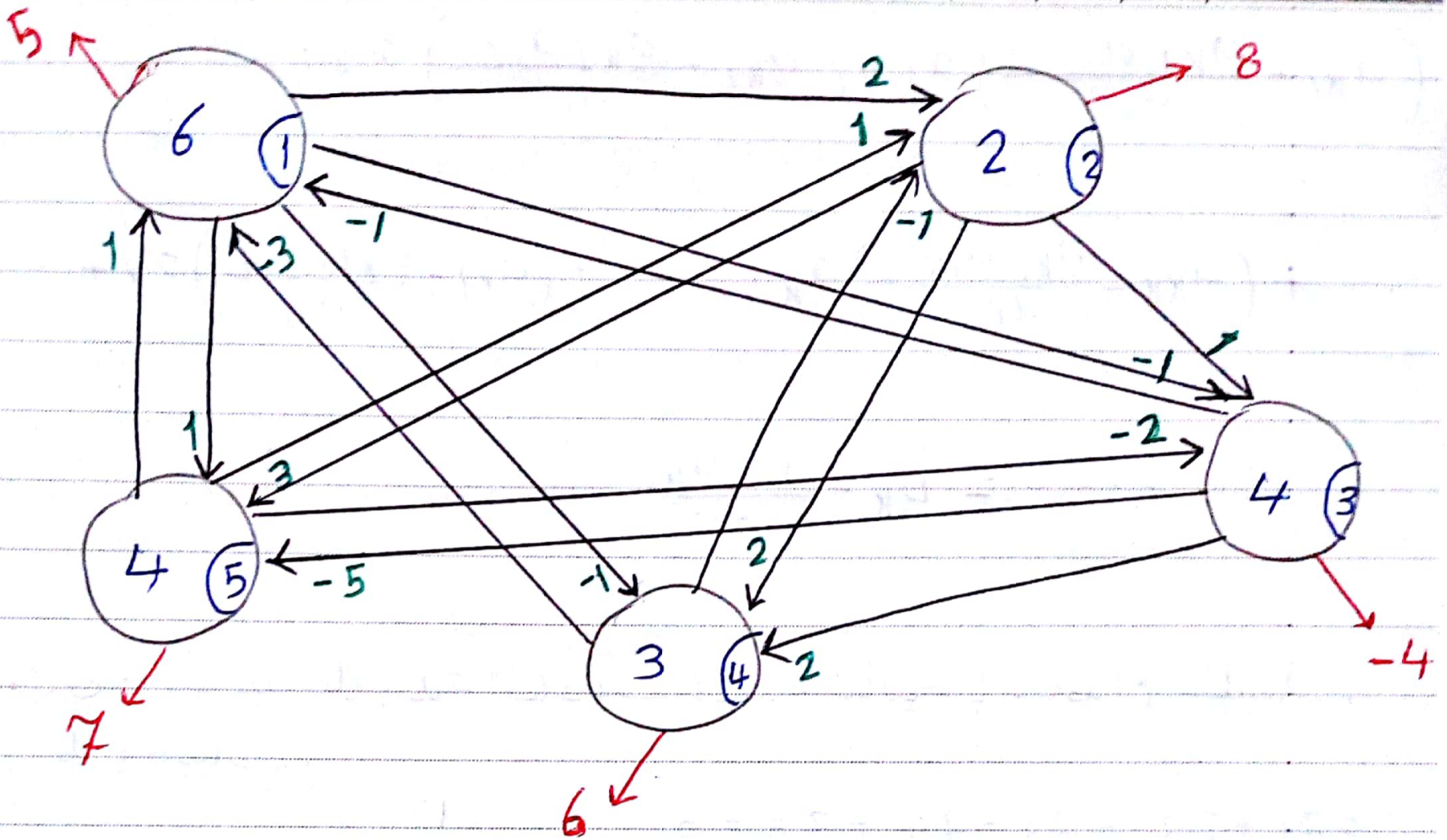
① نرسم البيان الموافق لهذه الجملة:

+ المتغيرات عقد (5 متغيرات)

+ الأضلاع هم أمثال المتغيرات

مصنوفة الأمثال:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$6 = a_{11}$	2	-1	-1	1
$x_2$	0	$2 = a_{22}$	1	2	3
$x_3$	-1	0	$4 = a_{33}$	2	-5
$x_4$	-3	-1	0	$3 = a_{44}$	0
$x_5$	1	1	-2	0	$4 = a_{55}$



هذا البيان الممثل

\* من المعادلة (1)

$$x_1 = \frac{5 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5}{6}$$

①  $b'_k = b_k - \frac{a_{ki} b_i}{d_{ii}}$  الطرف الثاني

②  $d'_{kk} = d_{kk} - \frac{d_{ik} d_{ki}}{d_{ii}}$  عناصر القطر

③  $d'_{kl} = d_{kl} - \frac{d_{il} d_{ki}}{d_{ii}}$  أمثال الجاهيل (الأقواس)

$$i = 1$$

$$k = 5$$

$$l = 2$$

$$a'_{55} = a_{55} - \frac{a_{15} \cdot a_{51}}{a_{11}}$$

$$= 4 - \frac{1 \cdot 1}{6} = \frac{24 - 1}{6} = \frac{23}{6}$$

$$d'_{22} = a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}} = 2 - \frac{2 \cdot 0}{6} = 2$$

$$d'_{33} = a_{33} - \frac{a_{13} \cdot a_{31}}{a_{11}} = 4 - \frac{(-1) \cdot (-1)}{6} = \frac{24 - 1}{6}$$

$$= \frac{23}{6}$$

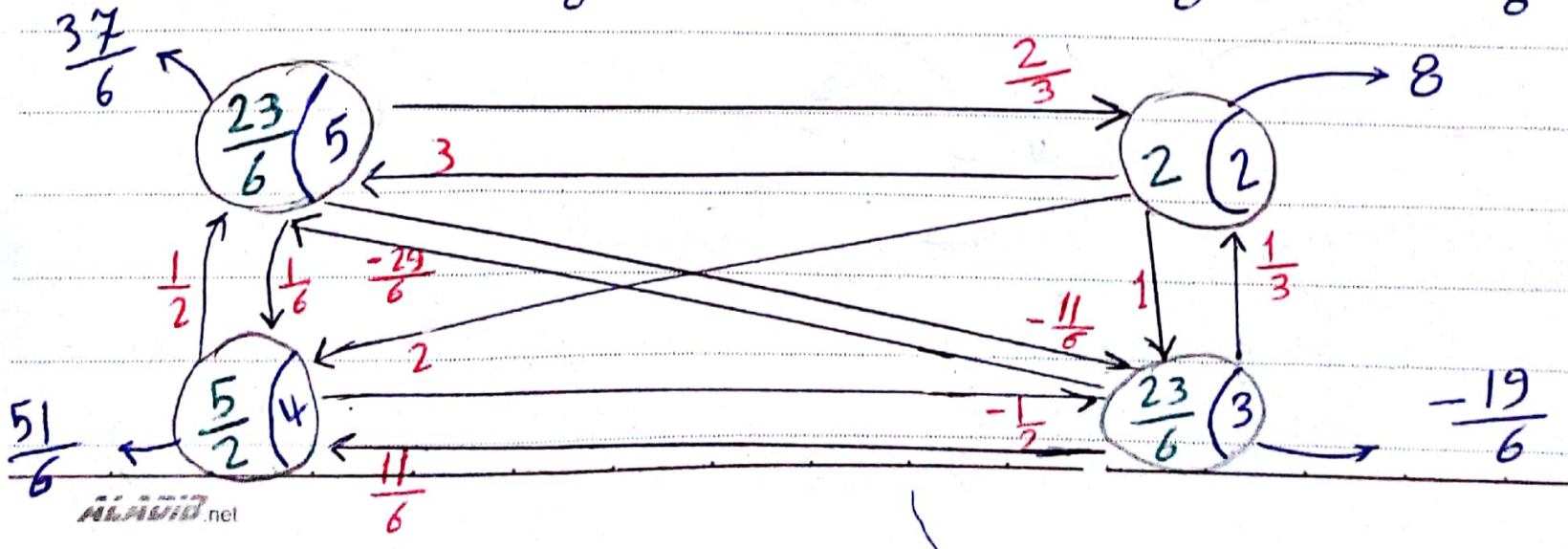
$$d'_{44} = a_{44} - \frac{a_{14} \cdot a_{41}}{a_{11}} = 3 - \frac{(-1) \cdot (-3)}{6} = \frac{5}{2}$$

$$* b'_5 = b_5 - \frac{a_{51} \cdot b_1}{6} = 7 - \frac{(1) \cdot (5)}{6} = \frac{37}{6}$$

$$* b'_2 = b_2 - \frac{a_{21} \cdot b_1}{6} = 8 - \frac{(0) \cdot (5)}{6} = 8$$

$$* b'_3 = b_3 - \frac{a_{31} \cdot b_1}{6} = -4 - \frac{(-1) \cdot (5)}{6} = \frac{-19}{6}$$

$$* b'_4 = b_4 - \frac{a_{41} \cdot b_1}{6} = 6 - \frac{(-3) \cdot (5)}{6} = \frac{51}{6}$$



5 → 2

$$\# a'_{52} = a_{52} - \frac{a_{12} \cdot a_{51}}{a_{11}} = 1 - \frac{(2)(1)}{6} = \frac{2}{3}$$

2 → 5

$$\# a'_{25} = a_{25} - \frac{a_{15} \cdot a_{21}}{a_{11}} = 3 - \frac{(1)(0)}{6} = 3$$

5 → 3

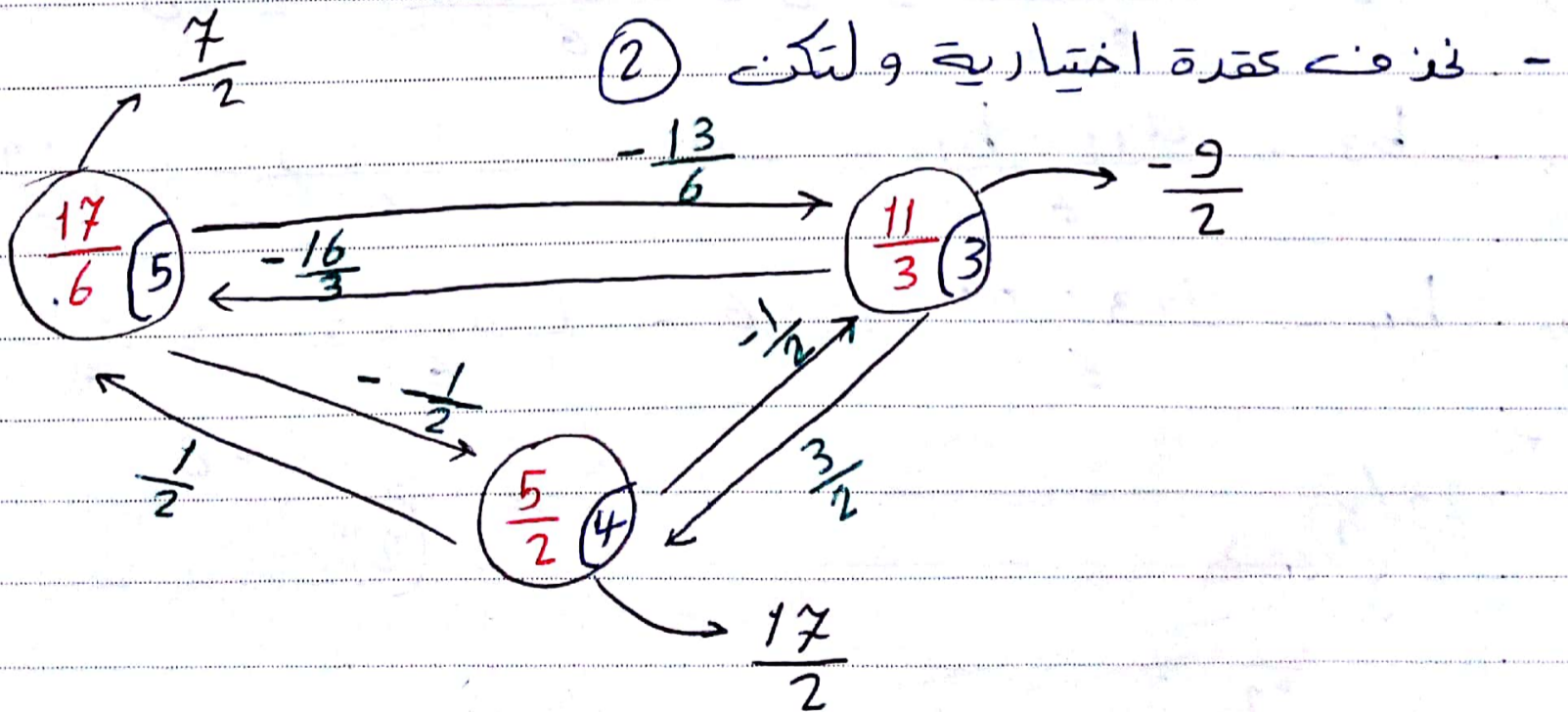
$$\# a'_{53} = a_{53} - \frac{a_{13} \cdot a_{51}}{a_{11}} = -2 - \frac{(-1)(1)}{6} \\ = \frac{-12 + 1}{6} = \frac{-11}{6}$$

3 → 5

$$\# a'_{35} = a_{35} - \frac{a_{15} \cdot a_{31}}{a_{11}} = -5 - \frac{(-1)(1)}{6} = \frac{-29}{6}$$

ملاحظة:

(( إذا نتجت لدينا قيمة الصفر فإننا لا نؤم السهم الموافق ))



$$\bullet a'_{55} = a_{55} - \frac{a_{25} \cdot a_{52}}{a_{22}} = \frac{23}{6} - \frac{(\frac{2}{3})(3)}{2}$$

$$\bullet a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{23} \cdot a_{32}}{a_{22}} = \frac{23}{6} - \frac{(1)(\frac{1}{3})}{2} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$\bullet a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24} \cdot a_{42}}{a_{22}} = \frac{37}{6} - \frac{(\frac{2}{3})(8)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\ast b'_5 = b_5 - \frac{a_{52} \cdot b_2}{a_{22}} = \frac{37}{6} - \frac{(\frac{2}{3})(8)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\ast b'_3 = b_3 - \frac{a_{32} \cdot b_2}{a_{22}} = \frac{-19}{6} - \frac{(\frac{1}{3})(8)}{2} = \frac{-9}{2}$$

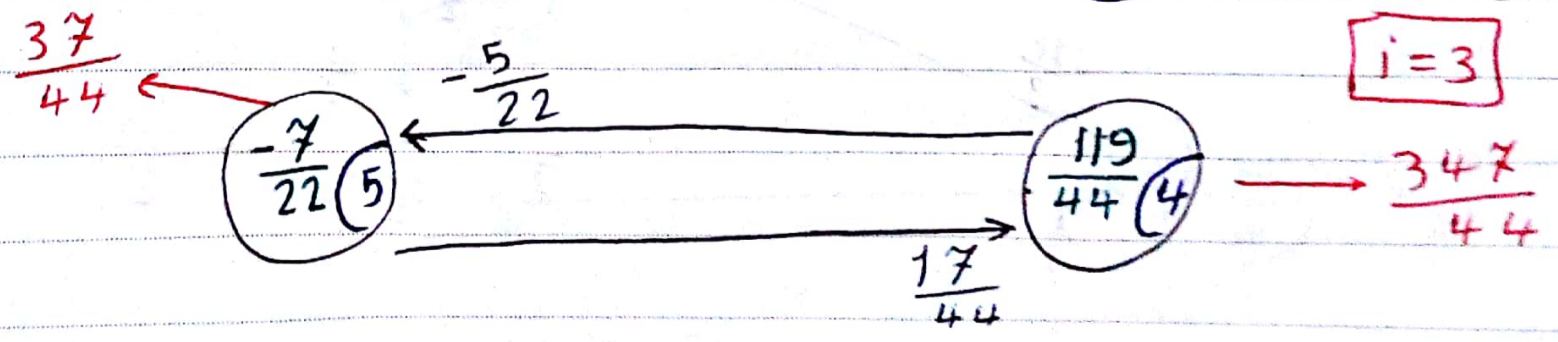
$$\ast b'_4 = b_4 - \frac{a_{42} \cdot b_2}{a_{22}} = \frac{17}{2}$$

$i=2$  ,  $5 \rightarrow 3$

$$\# a'_{53} = a_{53} - \frac{a_{23} \cdot a_{52}}{a_{22}} = \frac{-11}{6} - \frac{(1)(\frac{2}{3})}{2} = \frac{-13}{6}$$

$$\# a'_{35} = a_{35} - \frac{a_{25} \cdot a_{32}}{a_{22}} = \frac{-29}{6} - \frac{(3)(\frac{1}{3})}{2} = \frac{-16}{3}$$

③ حذف المقعدة -



حذف الخطوات السابقة - - -

$$i = 4$$

خذ من العقدة (4) فيصبح البيان بالمثل:

$$\left( \frac{-2}{7} \right) (5) \rightarrow -\frac{2}{7}$$

ومن ثم نجد أنه لم يعد هناك عقد يمكن حذفها، بالتالي نكتب الآن المعادلات من البيان الأخير وهي:

$$-\frac{2}{7} x_5 = -\frac{2}{7} \Rightarrow x_5 = 1$$

الآن نعود تدريجياً للبيان:

$$\left( \frac{-7}{22} \right) (5) \xleftarrow{-\frac{5}{22}} \left( \frac{119}{44} \right) (4) \xrightarrow{\frac{17}{44}} \frac{347}{44}$$

حيث معادلاته هي:

$$\frac{119}{44} x_4 - \frac{5}{22} x_5 = \frac{347}{44}$$

$$\frac{17}{44} x_4 - \frac{7}{22} x_5 = \frac{37}{44}$$

نحذف من هـ إحدى المعادلات القوية  $x_5 = 1$ ، فنجد أن:  $x_4 = 3$   
نعود للبيان ذو الثلاث عقد:

$$\left( \frac{11}{3} \right) (3) \xrightarrow{-\frac{13}{6}} \left( \frac{17}{6} \right) (5) \xrightarrow{\frac{7}{2}} \frac{7}{2}$$

$$\left( \frac{11}{3} \right) (3) \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \left( \frac{5}{2} \right) (4) \xrightarrow{\frac{3}{2}} \frac{17}{2}$$

$$\left( \frac{17}{6} \right) (5) \xrightarrow{\frac{1}{2}} \left( \frac{5}{2} \right) (4)$$

هيه مفوض في احدى معادلاته فوراً ولتكن المعادلة :

$$\frac{11}{3}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{16}{3}x_5 = -\frac{9}{2} \Rightarrow x_3 = -1$$

نعود للبيان ذو الأربع عقد، ولناخذ احدى معادلاته ولتكن :

$$2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8 \quad x_2 = 0$$

نعود من أخيراً في احدى المعادلات في البداية، ولتكن أول معادلة وهي :

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5 \quad x_1 = 1$$

بالتالي فإن حل جملة المعادلات السابقة هو :

$$X = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1)^T$$

بيان البتاشي ١١

انتهى