◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: الحادية عشر

**مرحبا اصدقائي: نكمل معكم زملائي بحثنا الذي كان بعنوان "الاستيفاء بكثيرات الحدود"**

**لنبدأ: الطريقة الثانية (طريقة نيوتن):** بفرض لدينا $n+1$ نقطة، ولتكن $p_n(x)$ حدودية تستوفي جميع هذه النقاط

- بناءً على بعض الاستنتاجات وصلنا إلى هذه العلاقة :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\dots\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})$$

**تنويه:** إذا أضفنا النقطة $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ستضاف إلى الحدودية فتصبح الحدودية

$$p_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\dots\dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1}) + a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)$$

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $a_0$ $y_0$ | | | |
| | | | $f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $a_1$ | | |
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$ $a_2$ | |
| | | | $f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0}$ $a_3$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | | $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$ | |
| | | | $f[x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ | | |
| 3 | $x_3$ | $y_3$ | | | |

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

**مثال :** لتكن البيانات أو النقاط التالية : استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حدودية الاستيفاء من الدرجة الرابعة:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 5 | 7 | 8 | 10 |
| $f(x_i)$ | 0 | 2 | $-1$ | $-2$ | 20 |

**الحل :**

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x)(x-5) + a_3(x)(x-5)(x-7) + a_4(x)(x-5)(x-7)(x-8)$$

**ملاحظة** : وحتى يتم المطلوب فإنه يتوجب علينا تعيين $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ لذا نقوم ببناء جدول الفروق المقسومة كما يلي:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}/$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $a_0$ 0 | | | | |
| | | | $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{5-0} = 0{,}4$ $a_1$ | | | |
| 1 | 5 | 2 | | $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1{,}5-0{,}4}{7-0} = -0{,}271$ $a_2$ | | |
| | | | $f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{7-5} = -1{,}5$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{0{,}167+0{,}271}{8-0} = 0{,}0548$ $a_3$ | |
| 2 | 7 | $-1$ | | $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1+1{,}5}{8-5} = -0{,}167$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ $a_4$ $= \frac{0{,}767 - 0{,}0548}{10 - 0} = 0{,}0712$ |
| | | | $f[x_3, x_2] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-2+1}{8-7} = -1$ | | $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{4 - 0.167}{10 - 5} = 0{,}767$ | |
| 3 | 8 | $-2$ | | $f[x_2, x_3, x_4] = \frac{11+1}{10-7} = 4$ | | |
| | | | $f[x_4, x_3] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{20+2}{10-8} = 11$ | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 20 | | | | |

القانون عليه علامات

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

نعوّض: $a_0 = 0, a_1 = 0{,}4, a_2 = -0{,}271, a_3 = 0{,}0548, a_4 = 0{,}0712$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 0 + 0{,}4(x-0) - 0{,}271(x-0)(x-5) \\ &+ 0{,}0548(x-0)(x-5)(x-7) \\ &+ 0{,}0712(x-0)(x-5)(x-7)(x-8) \\ &= 0{,}4x - 0{,}271x(x-5) + 0{,}0548x(x-5)(x-7) \\ &+ 0{,}0712x(x-5)(x-7)(x-8) \\ &= x[0{,}4 + (x-5)(-0{,}271) + (x-7)(0{,}0584) + (x-8)(0{,}0712)] \end{aligned}$$

- **الخطأ الأعظمي المرتكب في طريقة نيوتن: (طريقة نيوتن لها شكلين للخطأ )**

١) الطريقة الأولى : هو نفس قانون الخطأ الأعظمي المرتكب بطريقة لاغرانج $E_{max} = \left|\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} \cdot f_{(\theta)}^{(n+1)}\right|$

2)الطريقة الثانية : لدينا النقاط $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ عددها ( *n+1* ) نقطة .

نحتاج نقطة إضافية $(x_{n+1},y_{(n+1)})$ يصبح عدد النقاط $(n+2)$

$$p_{n+1}(x) = a_0 + a \dots\dots\dots\dots + a_{n-1}(x-x_0)\dots\dots(x-x_n)$$

$$E_{max} = \mathrm{a}_{n+1} \ , p_{n+1}$$

$$\left|\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta)\right| = |\mathrm{a}_{n+1} \cdot p_{n+1}| \Rightarrow \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} = \mathrm{a}_{n+1} \Rightarrow f^{n+1}(\theta) = \mathrm{a}_{n+1}\,(n+1)!$$

ومن الطريقة الثانية لل $E_{max}$ استطعنا إيجاد قيمة المشتق من المرتبة $(n+1)$ دون أن نعرف الدالة والنقطة

كيف يأتي السؤال :بفرض أن النقطة (...،....) أوجد القيمة العظمى للمشتق ؟(دون معرفتنا للدالة )

**تمرين:** لتكن لدينا البيانات التالية :

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن ثم احسب $f(1{,}5)$ (أي أوجد الدالة عند النقطة 1,5

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 1 | 8 | 27 |

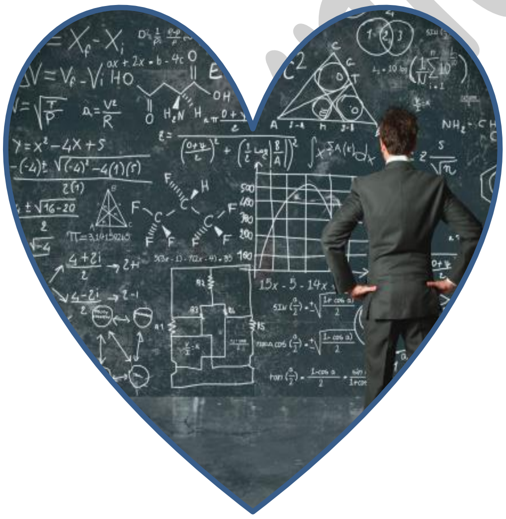
**الحل:**

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 $a_0$ | | | |
| | | | $\frac{1-0}{1-0}=1$ $a_1$ | | |
| 1 | 1 | 1 | | $\frac{7-1}{2-0}=\frac{6}{2}=3$ $a_2$ | |
| | | | $\frac{8-1}{2-1}=7$ | | $\frac{6-3}{3-0}=1$ $a_3$ |
| 2 | 2 | 8 | | $\frac{19-7}{3-1}=\frac{12}{2}=6$ | |
| | | | $\frac{27-8}{3-2}=19$ | | |
| 3 | 3 | 27 | | | |

$$p_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\dots\dots+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})$$

$$p_3(x)=0+1(x-0)+3(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$

$$f(1{,}5)=p_3(1{,}5)\cong 3{,}375$$



"انتهت المحاضرة"

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي