◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة : الرابعة عشر   عنوان المحاضرة :دالة النظيم

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- دالة النظيم .

2- مبرهنة بعد الفضاء الجزئي.

بسم الله الرحمن الرحيم

سنتعرف في محاضرتنا على دالة النظيم والفضاء المنظم الذي يعتبر من أهم أنواع الفضاءات في التحليل الدالي، ولا بد من الإشارة إلى أنه لا يمكن إدخال النظيم إلا على فضاء متجهي ، لكن قبل ذلك سنذكر بالتعريف قاعدة الفضاء المتجهي (الشعاعي):

-إذا وجدنا في فضاء ما جملة من الاشعة عددها (n) مستقلة بحيث إذا كان $(n+1)$ من الأشعة مرتبطة وهذه المجموعة تمكننا من كتابة أي عنصر من الفضاء كتركيب خطي بدلالة عناصر هذه المجموعة ،ندعو هذه المجموعة قاعدة الفضاء وعدد عناصر هذه المجموعة يساوي بعد الفضاء.

مثال: الفضاء $\mathbb{R}^2$ يتم توليده بالقاعدة القانونية $\{i=(1,0)\,,j=(0,1)\}$ نلاحظ أن عناصر هذه القاعدة مستقلة (كونها قاعدة) وعدد هذه العناصر يساوي بعد الفضاء (2) وأي عنصر من $\mathbb{R}^2$ يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة هذين الشعاعين .

ملاحظة :يوجد لكل فضاء شعاعي عدد غير منته من القواعد ولكن جميع هذه القواعد تحقق بأن لها عدد العناصر نفسه.

****تعريف (دالة النظيم ، والفضاء المنظم):***

ليكن لدينا X فضاء متجهي لنعرف عليه الدالة التالية $(||.||)$ بالشكل:

$$||.||: X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ||x||$$

فإنه $\forall \overbrace{x,y}^{\text{متجهات}} \in X$ إذا حققت هذه الدالة الشروط الاربع التالية:

N_1: $||x|| \geq 0$

N_2: $||x|| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_X$ (الشعاع الصفري)

N_3: $||\alpha.x|| = |\alpha|.||x||$; $\alpha \in K$

إذا كانت $K = \mathbb{C}$ فإن $|\alpha|$ هي طويلة العدد

N_4: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

عندها نقول إن الدالة$||.||$ هي دالة نظيم (Norm) ويدعى الفضاء المتجهي المزود بهذه الدالة بالفضاء المنظم $X = (X, ||.||)$

ملاحظات:

1- لابد من التأكيد على أنه لا يمكننا تعريف دالة النظيم إلا على فضاء متجهي (شعاعي) وإن جميع الفضاءات التي درسناها سابقاً
$[\ldots, C[a,b], \ell^p, \ell^\infty]$ هي فضاءات شعاعية يمكن تعريف النظيم عليها

2- كل فضاء منظم هو فضاء متري والعكس ليس صحيح بالضرورة بمعنى أخر .
(كل نظيم يولد مترك ولكن ليس كل مترك يولد نظيم) أي $d(x,y) = ||x - y||$
ويسمى هذا المترك : المترك المولد بالنظيم.
((وإن d موجود حتما كون $||x - y||$ موجود بحيث انه معرف على فضاء شعاعي))

تمرين : ليكن لدينا الفضاء المتجهي $C[a,b]$ ولنعرف عليه الدالة التالية :

$$||.||: C[a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ||x|| = \max|x(t)|$$

وإن الفضاء $C[a,b]$ مزود بالعمليتين التاليتين $\forall x,y \in C[a,b]$

1-$(x + y)(t) = (x)(t) + (y)(t)$

2-$(\alpha.x)(t) = \alpha.(x)(t)$; $\alpha \in \mathbb{R}$

أثبت أن $(C[a,b], +, .)$ فضاء منظم.

الحل : حتى نثبت أن $(C[a,b], +, .)$ أنه فضاء منظم يجب علينا أن نثبت أن الدالة $||.||$ المعرفة عليه هي دالة نظيم وتحقق الشروط الاربعة علماً أن$C[a,b]$ فضاء شعاعي (متجهي).

<u>الشرط الأول:</u>

$$||x|| = \underbrace{\max}_{a \leq x \leq b} |x(t)| \geq 0$$
(وضوحاً كون القيمة المطلقة موجبة دوماً)

<u>*الشرط الثاني :*</u> $||x|| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \max|x(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

إذاً أياً يكن $t \in [a,b]$ فإن الدالة x ستصور النقطة t بالصفر إذن x هي الدالة الصفرية $x = 0_X$

<u>*الشرط الثالث:*</u>

$$||\alpha.x|| = \max|(\alpha.x)(t)| \underbrace{=}_{\text{حسب العملية المعرفة}} \max|\alpha.(x)(t)|$$

$$\underbrace{=}_{\text{حسب خواص القيمة المطلقة}} \max|\alpha|.|x(t)|$$

كون $|\alpha|$ عدد حقيقي ثابت نستطيع إخراجه $= |\alpha|.\max|x(t)| = |\alpha|.||x(t)||$ محقق

<u>*الشرط الرابع:*</u> $||x+y|| = \max|(x+y)(t)|$

$$\underbrace{=}_{\text{حسب العملية}(+)\text{المعرفة}} \max|(x)(t) + (y)(t)|$$

لدينا $|(x)(t) + (y)(t)| \le |(x)(t)| + |(y)(t)|$ حسب خواص القيم المطلقة

ولدينا $(x)(t) \le \max|(x)(t)|$

ولدينا $(y)(t) \le \max|(y)(t)|$

$$\Rightarrow |(x)(t) + (y)(t)| \le \max|(x)(t)| + \max|(y)(t)|$$

أي أن الطرف الأيمن يمثل حد اعلى للطرف الأيسر ولكن $sup|(x)(t) + (y)(t)|$

هو أصغر الحدود العليا وبما ان المجال مغلق وال sup ينطبق على max يكون لدينا

$$\Rightarrow \max|(x+y)(t)| \le \max|(x)(t)| + \max|(y)(t)|$$

$$\Rightarrow ||x+y|| \le ||x|| + ||y||$$ محقق

نلاحظ تحقق الشروط الأربعة إذاً $||.||$ هي دالة نظيم (Norm) وإن $(C[a,b],+,\ .)$ هو فضاء المنظم.

تذكرة بالفضاء الجزئي: ليكن لدينا الفضاء المتجهي X يسمى الفضاء الجزئي X بفضاء جزئي غير فعلي

ويسمى كل فضاء جزئي آخر من $X(\neq \{0\})$ بفضاء جزئي فعلي

***مبرهنة بعد الفضاء الجزئي :**

ليكن لدينا X فضاء بعده n $(dimX = n)$ وليكن لدينا Y فضاء جزئي فعلي منه (أي يوجد على الأقل عنصر موجود في X وليس موجود في Y)

عندئذٍ فإن بعد الفضاء y اصغر تماماً من n $((dimY < n))$

البرهان :

1- $n = 0 \Leftarrow$ $dimX = 0 \Leftarrow$ $X = \{0\}$ الفضاء الصفري
في هذه الحالة ليس له فضاء جزئي فعلي (لكن له فضاء جزئي هو الفضاء نفسه)
ويتم المطلوب

2- $dimY = 0 \Leftarrow$ $Y = \{0\}$ وكون Y هو فضاء جزئي فعلي من X فإنه يوجد على الأقل عنصر
من X لا ينتمي إلى y أي أنه

ولدينا $\begin{cases} dimX \geq 1 \\ dimY = 0 \end{cases} \Longrightarrow dimY < dimX = n$

3- لنفرض أن $dimY = n$ في هذه الحالة يتطابق الفضاءان لأنه لدينا تعريفاً كون Y جزئي من X فإن $Y \subseteq X$ وأيضا لو أخذنا $x \in X$ فإنه كون X فضاء شعاعي فإن x يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة (n) عنصر مستقل إذن $Y \subseteq X$ وبالتالي $Y = X$
وهذا مرفوض لأن Y فضاء جزئي فعلي من X أي يوجد على الأقل عنصر موجود في X ليس موجود في Y ومما سبق نستنتج أن

$dimY < n$ وهو المطلوب

انتهت المحاضرة

تصحيح أخطاء في المحاضرة 13 الصفحة 4 السطر 4:

الخطأ: ان كلا من X و $\{\emptyset\}$ هي فضاء جزئي خاص من X، حيث يسمى X فضاء جزئي غير فعلي

ويسمى كل فضاء جزئي من X ولا يساوي $\{\emptyset\}$ بفضاء جزئي فعلي.

التصحيح: ان كلا من X و $\{0\}$ هي فضاءات جزئية خاصة من X، حيث يسمى X فضاء جزئي غير فعلي

ويسمى كل فضاء جزئي آخر من $X\ (\neq \{0\})$ بفضاء جزئي فعلي.