نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄المحاضرة: الثامنة عنوان المحاضرة: Relations

بعد أن أنهينا الفصل الثاني سنبدأ بالفصل الثالث من مقررنا و هو (التوابع)

بعض المفردات هامة لفهم النص

Inverse	عكسية	Symmetric	تناظرية
Reversed	نعكس	Anti-symmetric	تخالفية
Domain	منطلق	Transitive	متعدية
Range	مستقر	Assume	نفرض
Transpose	منقول	Perpendicularity	التعامد
Composition	تركيب	Euclidean	اقليدي
Rise	ينتج	Perpendicular	يعامد
Interpretation	تفسير	Inclusion	احتواء
Path	طريق	Divide	يقسم
Accordingly	و بالتالي – و هكذا	Equivalence	تكافؤ
Multiplying	جداء	Nonzero entries	مدخلات غير صفرية
Properties	خصائص	Associative	تجميعية
Reflexive	انعكاسية		

INVERSE RELATIONS

LeT R be a relation from A to B . the inverse of R , denoted by R^{-1}, is the relation:
From B to A which consists of those ordered pairs which. When reversed belong to R :
R^{-1}={(b,a): (a,b)∈R}
In other words , bR^{-1}a if and only if aRb .

-Example 2.5.

(a) let R be the following relation on A={1,2,3}:
R={(1,2),(1,3),(2,3)} then R^{-1}={(2,1),(3,1),(3,2)}
(b) The inverses of the relations defined by
"x is the husband of y" and "x is taller than y"
Are respectively
"x is the wife of y" and "x is shorter than y"

Syria Math

Clearly, if R is any relation then $(R^{-1})^{-1} = R$. Also, the domain of R^{-1} equals the range of R , and the range of R^{-1}equals the domain of R .
Furthermore , if M_R is the matrix of a relation R between finite sets , then the matrix $M_{R^{-1}}$of R^{-1} is the transpose of the matrix of R :
$M_{R^{-1}}=M_R^T$
For example , the matrices of the relations in(Example (a))
Are as follows:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_R^T$$

26. COMPOSITION OF RELATIONS

Let A,B, and C be sets , and let R be a relation from A to B and let S be a relation from B to C .
That is, R is a subset of A x B and S is a subset of B×C .
Then R and S give rise to a relation from A to C denoted by R○ S and defined by:

$$a(RoS)c \text{ if for some } b\in B \text{ we have } aRb \text{ and } bSc$$

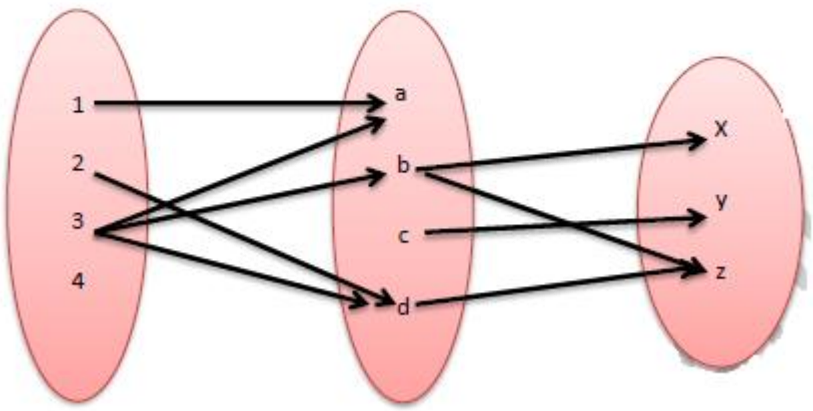
That is , $RoS=\{(a,c):\text{there exists } b\in B \text{ for which } (a,b)\in R \text{ and } (b,c)\in S\}$
The relation R○ S is called the composition of R and S ; it is sometimes denoted simply by RS.
The arrow diagrams give us a geometrical interpretation of R○ S as seen in the following example .

Example 2.6.

Let A ={1,2,3,4,},B={a,b,c,d} ,C={x, y, z} and les

R={(1,a)(2,d)(3,a),(3,b),(3,d)}

S={(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)}



Consider the arrow diagrams of R and S as in fig2-5 .
Observe that there is an arrow from 2 to d which is followed by an arrow form d to z.
We can view these tow arrows as a "path" which "connects" the element 2∈A to the element z∈C .
Thus
2(R○ S)z since 2Rd and dSz
Similarly there are paths from 3 to x and from 3 to z .
Hence
3(R ○S)x and 3(R ○S)z
No other element of A is connected to an element of C .
Accordingly,
R○ S={(2,z),(3,x),(3,z)}
There is another way of finding R○S .
let M_R and M_S denote respectively the matrices of the relations R and S .
then

$$M_R = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{and} \quad M_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

multiplying M_R and M_S we obtain the matrix

$$M = M_R . M_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

The nonzero entries in this matrix tell us which elements are related by $R \circ S$.
Thus : $M = M_R M_S$ and M_{RoS} have the same nonzero entries .
Our first theorem tells us that the composition of relations is associative .

Theorem 2.1: let A,B,C and D be sets. Suppose R is a relation from A to B ,S is a relation from B to C and T is a relation from C to D .
Then $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$

2.7 PROPERTIES OF RELATIONS :

هذه الخصائص هامة جداً

Let R be a relation on a set A .We list four types of relations:
(1)R is reflexive if aRa for every a in A .
(2)R is symmetric if aRb implies bRa .
(3) R is anti−symmetric if aRb and bRa implies a=b
(4)R is transitive if aRb and bRc implies aRc.
Observe that these properties are only defined for relations on a set .

EXAMPLE 2.7.

(a) Consider the relation$\subset$ of set inclusion on any collection C of sets. Note that
1)$A\subset A$ for any set A in C, so $\subset$ is reflexive ;
2)$A\subset B$ does not imply $B\subset A$ so $\subset$ is not symmetric;
3)If $A\subset B$ and $B\subset A$ then A=B, so $\subset$ is anti-symmetric;
4)If $A\subset B$ and $B\subset C$ then $A\subset C$, so $\subset$ is transitive.
(we assume that C has more than one set .)

(b) Consider the relation=of equality on any set A. Note that =satisfies all four of the above properties .
That is,
1) a=a for any element $a\in A$,
2) if a=b then b=a;
3) if a=b and b=a then a=b;
4) if a=b and b=c the a=c;
this example shows that symmetric and anti-symmetric relations are not the negations of each other .

(c) consider the relation R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)} on A={1,2,3}. Then :
1) 2 is in A but $2\not R 2$, so R is not refiexive;
2) 2R3 but $3\not R 2$, so R is not symmetric;
3) 1R2 and 2R1 but $1\neq 2$, so R is not anti-symmetric;
4)1R2 and 2R3 but $1\not R 3$ so R not transitive.

(d) Consider the relation $\perp$ of perpendicularity on the set L of lines in the Euclidean plane.
If line a is perpendicular to line b then b is perpendicular to a, i.e . if $a\perp b$ then $b\perp a$

Hence ⊥ is symmetrie.
However⊥, is neither reflexive, anti-symmetric nor transitive

الترجمة

مرحباً بكم أصدقائي سنكمل هي هذه المحاضرة في فصل العلاقات و هو من الأبحاث الهامة جداً للامتحان ..لنبدأ :

٢.٥ العلاقة العكوسة (العكسية)

لتكن R علاقة من A إلى B العلاقة العكسية لـ Rيرمز لها بـR^{-1} حيث أنها العلاقة من B إلى A و التي تتألف من تلك الأزواج المرتبة التي عندما نقبلها (نعكسها)تكون منتمية إلىR
$R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$
بعبارة أخرة $bR^{-1}a$ إذا وفقط إذا كان. aRb

مثال 2.5:

a) لتكن R هي العلاقة التالية على المجموعة: $A=\{1,2,3\}$
$R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ عندها يكون $R^{-1}=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$
(b)إن العلاقة العكسية للعلاقة التالية تعرف بالشكل:
"x هو زوج y " و "xأطول من y"
و هي على الترتيب:
" xهي زوجة y" و" x أقصر من y"
بشكل واضح , إذا كانت العلاقة R - هي أي علاقة , عندها $(R^{-1})^{-1}=R$ و أيضاً إن منطلق العلاقة R^{-1}يساوي مستقر العلاقة R و مستقر العلاقة R^{-1} يساوي منطلق العلاقة R . بالإضافة إلى ذلك , إذا كانت M_Rمصفوفة العلاقةR بين المجموعات المنتهية , عندها تكون المصفوفة $M_{R^{-1}}$ هي منقول مصفوفة R أي , $M_{R^{-1}}=M_R^T$ على سبيل المثال:

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=M_R^T$$

2.6 تركيب العلاقات: لتكن A و B و C مجموعات و لتكن R علاقة من A إلى B و لتكن S علاقة من B إلى C. هذا يعني أن R هي مجموعة جزئية من A × B و S مجموعة جزئية من B × C . عندها R و S تنتج العلاقة من A إلى C و يرمز له
بـ RoS و التي تعرف بالشكل:
$a(RoS)c$إذا كان من أجل $b\in B$ لدينا aRb و bSc
$RoS=\{(a,c):(a,b)\in R ,(b,c)\in S$ من أجل كل$b\in B$ }
إن العلاقة RoS - تسمى تركيب العلاقة لـ R و S و يرمز لها في بعض الأحيان.RS
-مخطط الأسهم يعطي تفسير (توقع) هندسي للعلاقة RoS كما هو موضح في الشكل

مثال 2.6 لتكن: $A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{a,b,c,d\}$,$C=\{x,y,z\}$
و لتكن
$R=\{(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)\}$ $S=\{(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)\}$
"انظر الشكل ص2"

-لنرى المخططات السهمية للعلاقات R و S الموجودة في الشكل 2.5 نلاحظ أنه هنالك سهم من 2 إلى d و الذي يتبعه سهمين d إلى z
-بإمكاننا رؤية أن هنالك سهمان بمثابة " طريق "حيث" يصل " العنصر $2\in A$ مع العنصر $z\in C$ إذاً:
$2(RoS)z$ لأن $2Rd$, dSz
و بشكل مشابه , هنالك طرق من 3 إلى x و أيضاً من 3 إلى z و إذاً:
$3(RoS)x$, $3(RoS)z$
لا يوجد أي عنصر من A متصل مع أي عنصر من C و هكذا:
$RoS=\{(2,x),(3,x),(3,z)\}$
يوجد هناك طريقة أخرى من أجل إيجاد RoS , لتكن M_R و M_S تعرفان على الترتيب المصفوفتين للعلاقتين R و S عندها:

$$M_R=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\text{and}\quad M_S=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}\\ \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array} & \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

بضرب(جداء)المصفوفة M_R مع المصفوفة M_S نحصل على المصفوفة:

$$M=M_R.M_S=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}\\ \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array} & \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\1&0&2\\0&0&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

-المدخلات غير الصفرية في هذه المصفوفة تبين لنا أي العناصر مرتبطة بالعلاقة RoS و بالتالي $M=M_RM_S$ و M_{RoS}لها نفس المدخلات غير الصفرية
-تخبرنا نظريتنا الأولى أن تركيب العلاقات تجميعي
النظرية 1.2 : لتكن المجموعات A و B و C و D . لنفرض R هي علاقة من A إلى B و S هي علاقة من B إلى C و T هي
علاقة من C إلى D عندئذٍ:

$$(RoS)oT=Ro(SoT)$$

Syria Math Team

2.7خصائص العلاقات : لتكن R علاقة على المجموعة A . لنسرد 4 نماذج (أنواع) لعلاقات:
(1) R انعكاسية إذا كانت aRa من أجل كل $a\in A$
(2) R تناظرية إذا كانت aRb تكافئ bRa
(3)R تخالفية إذا كانت aRb و bRa تعطي أن a=b
(4)R متعدية إذا كانت aRb و bRc تعطي أن aRc
نلاحظ أن هذه الخصائص تكون معرفة فقط على الخصائص في المجموعات

مثال: 2.7

(a)لتكن لدينا العلاقة ⊂ علاقة احتواء المجموعة على أي جماعة C من المجموعات نلاحظ أن:
1-$A\subset A$من أجل أي مجموعة A في C لذلك تكون العلاقة ⊂ انعكاسية
2-$A\subset B$لا تعطي أن $B\subset A$ لذلك تكون العلاقة ⊂ ليست تناظرية
3-إذا كان $A\subset B$ و $B\subset A$ عندها A=B لذلك تكون العلاقة ⊂ تكون تخالفية
4-إذا كان $A\subset B$ و $B\subset C$ فإن $A\subset C$ لذلك تكون العلاقة ⊂ متعدية
(لنفرض أن C لها أكثر من مجموعة واحدة)

(b)لتكن لدينا العلاقة = علاقة المساواة على أي مجموعة A.
لاحظ أن العلاقة = تحقق كل الخصائص الأربعة الموجودة في الأعلى و التي هي:
(1)a=aمن أجل كل عنصر $a\in A$
(2)إذا كان a=b عندئذٍb=a
(3)إذا كان a=b و b=a عندئذٍ يكون a=b
(4)إذا كان a=b و b=c فإنa=c
يظهر لنا هذا المثال أن العلاقات التناظرية و العلاقات التخالفية هي ليست النفي (العكس) النفي لبعضها البعض

(c)لتكن لدينا العلاقة $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}$ على المجموعة $A=\{1,2,3\}$ عندئذٍ:

- 2موجودة في A و لكن $2\not R 2$ لذلك العلاقة R ليست انعكاسية
- 2R3 و لكن $3\not R 2$ لذلك العلاقة R ليست علاقة تناظرية
- 1R2 و 2R1 و لكن $1\neq 2$ لذلك العلاقة R ليست علاقة تخالفية
- 1R2 و 2R3 و لكن $1\not R 3$ لذلك R ليست علاقة متعدية

(d)لتكن لدينا العلاقة ⊥ و هي علاقة التعامد على المجموعة L من الخطوط في المستوي الإقليدي . إذا كان الخط a يعامد الخط b عندئذٍ يكون b يعامد a أي أنه إذا كان $a\perp b$ فإن $b\perp a$ و هذا يعني أن⊥ علاقة تناظرية , على أية حال العلاقة ⊥ ليست انعكاسية و ليست تخالفية و ليست متعدية.

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي

Syria Math Team