22-11-2017

نظري

◄دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة : السادس عشرة

◄عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

2- أمثلة على كل حالة من حالاتها.

3- ملاحظة.

◄**تنويه:** قد بدأ الدكتور في هذه المحاضرة بمراجعة فكرة من المحاضرة السابقة (المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة) وسنقوم بذكرها من البداية حرصاً على تسلسل الأفكار.

- المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

- نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$A_0 . y^{(n)} + A_1 . y^{(n-1)} + A_2 . y^{(n-2)} + \cdots + A_{n-1} . y' + A_n . y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من مراتب عليا ذات أمثال ثابتة.

وإذا كانت الأمثال لهذه المعادلة من الشكل:

$$a_0 . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \cdots + a_n . y = 0$$ حيث $a_i \; ; i = 0, \dots, n$ ثوابت.

- الحلول الخاصة لهذه المعادلة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

نشتق n مرة ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$y' = \lambda . e^{\lambda x} \, , y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x} \, , \dots \, , y^{(n)} = \lambda^n . e^{\lambda x}$$

فنحصل على:

$$a_0 . \lambda^n . e^{\lambda x} + a_1 . \lambda^{n-1} . e^{\lambda x} + \cdots + a_n . e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0}$$

تسمّى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال المتجانسة وبالتالي هذه المعادلة المميزة تشكل كثير حدود من الدرجة n في λ فهي تقبل n جذراً لها ونميز عدة حالات:

- **الحالة الأولى:**

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ فنحصل على الحلول الخاصة:

$$y_1 = e^{\lambda_1 . x} \, , y_2 = e^{\lambda_2 . x} \, , \dots , y_n = e^{\lambda_n . x}$$

عدد هذه الحلول هو n وهي مجموعة مستقلة خطياً وبالتالي تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

ويكون الحل العام معطى بالشكل التالي:

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 . x} + c_2 . e^{\lambda_2 . x} + \cdots + c_n . e^{\lambda_n . x}$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ كلها ثوابت.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y''' - y' = 0} \dots (*)$$

الحل:

نفرض أن: $\boldsymbol{y = e^{\lambda x}}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية (*) ومنه نجد:

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda . e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x} \Rightarrow y''' = \lambda^3 . e^{\lambda x}$$

نعوض بالمعادلة $(*)$ فنحصل على:

$$\lambda^3 . e^{\lambda x} - \lambda . e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^3 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda = 0$$

$$\lambda . (\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 1 , \lambda_3 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 , y_2 = e^x , y_3 = e^{-x}$$

فيكون الحل العام هو :

$$y = c_1 + c_2 . e^x + c_3 . e^{-x}$$

ـ الحالة الثانية:

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ إلا أن قسما منها جذوراً عقدية وبالتالي إذا كان: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ هو عبارة عن جذر للمعادلة المميزة (المساعدة) فإنّ مرافقه: $\overline{\lambda_2} = \alpha - \beta i$ هو أيضاً جذرا لها ويكون للمعادلة حلان خاصان هما:

$$y_1 = e^{\alpha + \beta i} \quad , \quad y_2 = e^{\alpha - \beta i}$$

وبالتالي:

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i . \sin \beta x]$$

$$e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x - i . \sin \beta \beta x]$$

مثال1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة هي: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

فتكون جذور المعادلة المميزة هي:

$$\lambda_1 = -2 + i \quad , \quad \lambda_2 = -2 - i$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(-2+i)x} = e^{-2x}(\cos x + i.\sin x)$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(-2-i)x} = e^{-2x}(\cos x - i.\sin x)$$

الحل العام:

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 = c_1.e^{(-2+i)x} + c_2.e^{(-2-i)x}$$

$$= (c_1 + c_2).e^{-2x}.\cos x + (c_1 - c_2).i.e^{-2x}.\sin x$$

$$= e^{-2x}[c_3.\cos x + c_4.i.\sin x] \;\; : c_3 = c_1 + c_2 \, , c_4 = c_1 - c_2$$

مثال2: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 1 + 2i \, , \lambda_3 = 1 - 2i$$

$$y_1 = e^x \quad , \qquad y_2 = e^{(1+2i)x} \quad , \qquad y_3 = e^{(1-2i)x}$$

الحل العام :

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 + c_3.y_3 = c_1.e^x + c_2.e^{(1+2i)x} + c_3.e^{(1-2i)x}$$

ـ الحالة الثالثة:

إذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية ولكنها مكررة $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ فإن الحل لها :

$$y = e^{\lambda_i . x}$$

تمثل حل واحد من الشكل: $y = e^{bx}$.

ومنه فإن العلاقة :

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 x} + c_2 . e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n . e^{\lambda_n x}$$

لا تعطي الحل للمعادلة التفاضلية وفي هذه الحالة تكون المعادلة المميزة من الشكل:

$$F(\lambda) = (\lambda - b)^n$$

حيث n هو عدد الجذور.

مثال1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

جذر مكرر.

الحلول الخاصة لها:

$$y_1 = e^x \,, \qquad y_2 = xe^x \,, \qquad y_3 = x^2 e^x$$

والحل العام :

$$y = c_1 . y_1 + c_2 . y_2 + c_3 . y_3 = c_1 . e^x + c_2 . x . e^x + c_3 . x^2 . e^x$$

◄**ملاحظة:** إذا قبلت المعادلة المميزة الجذر المركب $\alpha + \beta i$ مضاعفاً m مرة فيوجد للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الحلول الخاصة المستقلة من الشكل:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} \,, x . e^{(\alpha+\beta i)x} , \dots \dots$$

مثال2: أوجد الحل العام:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

الحل

المعادلة المميزة : $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$$(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \mp i$$

جذر مكرر.

الحل العام لها:

$$y = (c_1 + c_2 x).\cos x + (c_3 + c_4 x).i.\sin x$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحُلبي ورهف النقشي

كل شيء يولد مع #المطر

"الفرح،، الشفآء،، البهجة ،، وحتى الحياة

لمجرد سمآع صوت المطر "تشعر بأنگ أفضل من قبل"

#ساعد غيرك