نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄المحاضرة: السابعة

عنوان المحاضرة: Relations

ما زلنا في النص الذي بدأنا في و سنكمل اليوم في عرضه و ترجمته ....

بعض المفردات هامة لفهم النص

Pictorial	بياني	Binary	ثنائية
Consider	ندرس – نعتبر	Related	مرتبط
Emphasizing	تركيز (تأكيد)	Domain	منطلق
Graph	بيان	Range	مستقر
Consist	تتألف – تتكون	Goats	ماعز
Satisfy	تحقق	Cows	أبقار
Origin	مبدأ الإحداثيات	Hens	دجاج
Coordinate	التمثيل الإحداثي (البياني)	Adjacent	مجاور
Rows	أسطر	Divide	يقسم
Columns	أعمدة	Universal relation	علاقة شاملة
Labeled	ممثلة – مصنفة	Empty relation	علاقة خالية
Arrow	سهم	Arrow diagram	مخطط السهم
Directed graph	بيان موجّه		

2.3RELATIONS.

Let A and B be sets . A *binary* relation R , from A to B is a subset of $A \times B$.

if $(x,y) \in \mathcal{R}$, we say that x is R-related to y and denote this by $x \mathcal{R} y$

IF $(x,y) \notin \mathcal{R}$, we write $x \not\mathcal{R} y$ and say that x is not $\mathcal{R}$ related to y . if $\mathcal{R}$ is a relation from A to A , i.e. is a subset of $A \times A$, then we say that R is a relation on A .

Since we will deal mainly with binary relations , the word "relation " will mean binary relation unless otherwise specified .

The *domain* of a relation R is the set of all first elements of the ordered pairs which belong to R , and the range of R is the set of second elements .

EXAMPLE 2.3

(a)Let $A = \{1,2,3\}$, and $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(3,2)\}$. Then $\mathcal{R}$ is a relation on A since it is a subset of $A \times A$ with respect to this relation ,

$1\,\mathcal{R}\,2$, $1\,\mathcal{R}\,3$, $3\,\mathcal{R}\,2$ but $1 \not\mathcal{R}\, 1$, $2 \not\mathcal{R}\, 1$, $2 \not\mathcal{R}\, 2$, $2 \not\mathcal{R}\, 3$, $3 \not\mathcal{R}\, 1$, $3 \not\mathcal{R}\, 3$

The domain of R is {1,3} and the range of R is {2,3} .

(b) Let A={ eggs , milk , corn } and B={ cows , goats , hens } . we can define a relation R from A to B by (a,b)$\in R$ if a is produced by b. In other words ,

R={(eggs, hens),(milk, cows),(milk ,goats)}

With respect to this relation ,

Eggs R hens , milk R cows , etc

(c)Suppose we say that two countries are adjacent if they have some part of their boundaries in common .

Then "is adjacent to" is a relation R on the countries of the earth . Thus

(italy , Switzerland)$\in R$ but (Canda , Maxico) $\notin R$

(d)A familiar relation on the set Z of integers is "m divides n " . A common notation for this relation is to write m|n when m divides n . Thus 6|30 but $7 \nmid 25$.

(e)Among the basic relations considered in geometry are "is congruent to " and "is similar to ", which are relations on the set of geometric figures in the plane .The relation "is parallel to" and " is similar to " is a relation on the set of lines in the plane.
(f)Let A be any set . An important relation on A is that of equality,

$$\{(a,a): a \in A\}$$

Which is usually denoted by "=" . This relation is also called the identity relation in A and is sometimes denoted by Δ_A

(g)Let A be any set . Then A×A and $\emptyset$ are subsets of A×A and hence are relations on A called the universal relation and empty relation respectively .

2.4PICTORIAL REPRESENTATIONS OF RELATIONS

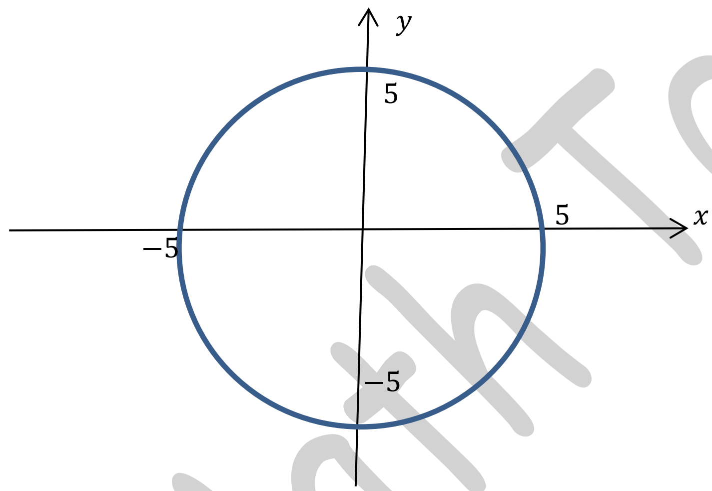
We first consider a relation S on R of real numbers , i.e. S is a subset of $R^2 = R \times R$
Since R^2 can be represented by the set of points in the plane , we can picture S by emphasizing those points in the plane which belong to S . The pictorial representation of the relation is sometimes called the graph of the relation .

Frequently , the relation S consists of all ordered pairs of real numbers which satisfy some given equation E(x,y)=0

We usually identify the relation with the equation , i.e. we speak of the relation E(x,y)=0

Example 2.4. consider the relation S defined by the equation $x^2+y^2=25$

That is ,S consists of all ordered pairs(x_0,y_0)which satisfy the given equation . The graph of the equation is a circle having its center at the origin and radius 5. See Fig .2-2.



$x^2+y^2=25$
$Fig\ 2-2$

Suppose now A and B are finite sets . we list three different ways of picturing a relation R from A to B .

(i)Represent the elements of A as points on some horizontal axis , and the elements of B as points on some vertical axis . The elements of $A\times B$ are then represented by the points of intersection of the vertical lines through the points of A and the horizontal lines through the points of B ; this representation is called a coordinate diagram of The relation R is pictured by adding emphasis to those points of $A\times B$ which belong to R.

(ii)From a rectangular array whose rows are labeled by the elements of A and whose columns are labeled by the elements of B .

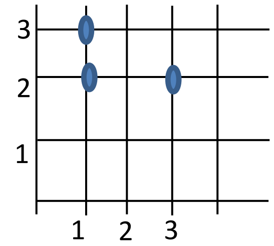
Put a 1 or 0 in each position of the array according as a ∈ A is or not realted to b ∈ B .

This array is called the matrix of the relation .

(iii)Write down the elements of A and the elements of B in two disjoint disks , and then draw an arrow from a ∈A to ∈B whenever a is related to b .

This picture will be called the arrow diagram of the relation .

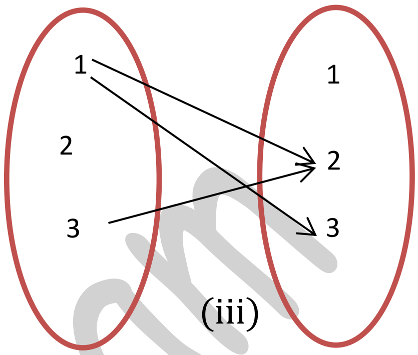
In fig 2-3 we picture the first tow relations of example 2.3 by the above three ways



(i)

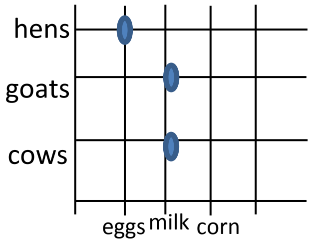
	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

(ii)



(iii)

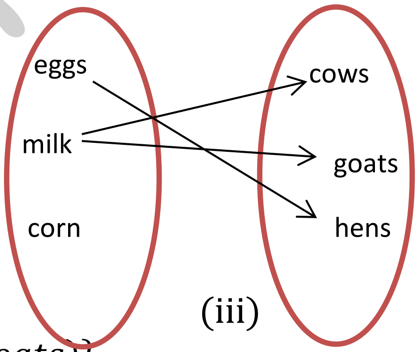
$$R = \{(1,2),(1,3),(3,2)\}$$



(i)

	cows	goats	hens
Eggs	0	0	1
Milk	1	1	0
corn	0	0	0

(ii)



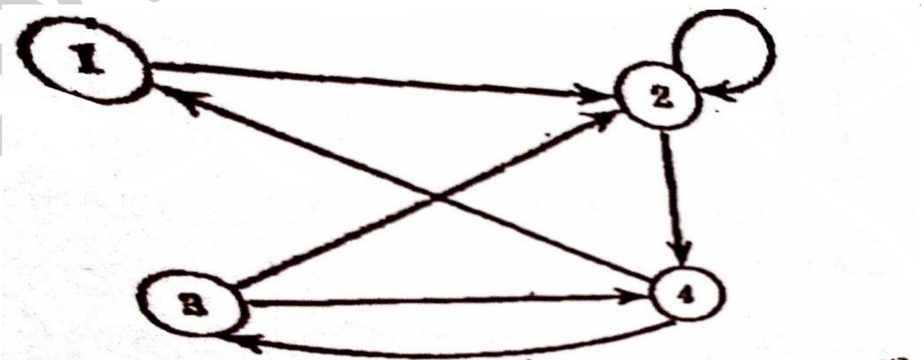
(iii)

$$R = \{(eggs, hens),(milk, cows),(milk, goats)\}$$

There is another way of picturing a relation when it is from a finite set into itself we write down the elements of the set and then draw an arrow from an element x to an element y whenever x is related to y this diagram is called the directed graph of the relation .

Figure 2-4 gives the directed graph of a relation R on the set A=(1,2,3,4).

Observe that there is an arrow from 2 to itself since 2 is related to 2.



$R = \{(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

Fig. 2-4

ترجمة :

٣.٢ علاقات :

لتكن A وB مجموعتين عندها "العلاقة الثنائية R " من A إلى B هي مجموعة جزئية من الجداء A×B . إذا كان $(x,y) \in R$ نقول أن x مرتبطة مع y وفق العلاقة R و يرمز لها xRy

-إذا كان $(x,y) \notin R$ عندها نكتب $x \not R y$ و نقول أن x ليست مرتبطة بـ y وفق العلاقة R. إذا كانت R علاقة من A إلى A ، هذا يعني أنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times A$ عندئذٍ نقول أن **R** هي علاقة على **A**

-بما أننا سنتعامل بشكل أساسي مع العلاقات الثنائية ، فإن كلمة " علاقة " سنعني بها علاقة ثنائية ، ما لم يرد خلاف ذلك

-المجال (المنطلق) للعلاقة **R** هو مجموعة كل العناصر الأولى (ذات المسقط الأول) من الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى **R** و المستقر للعلاقة **R** هو مجموعة العناصر الثانية ذات (المسقط الثاني) .

-مثال ٣.٢:

(a) لتكن $A = \{1,2,3\}$ و لتكن $R = \{\{1,2\}.\{1,3\},\{3,2\}\}$ عندئذٍ **R** هي علاقة على **A** لأنها مجموعة جزئية من **A×A** وفقاً لهذه العلاقة :

$$1\,\mathcal{R}\,2\,,1\,\mathcal{R}\,3\,,3\,\,\mathcal{R}\,2\ \text{but}\ 1\not\mathcal{R}\,1\,,2\,\not\mathcal{R}\,1\,\,,2\,\not\mathcal{R}\,2\,,2\,\,\not\mathcal{R}\,3\,,3\,\,\not\mathcal{R}\,1\,,3\,\,\not\mathcal{R}\,3$$

منطلق العلاقة **R** هو $\{1,3\}$ و المستقر لـ **R** فهو المجموعة **{2,3}** .

(b) لتكن $A = \{\text{ذرة, حليب, بيض}\}$ و $B = \{\text{دجاج, ماعز, أبقار}\}$

يمكننا تعريف علاقة **R** من **A** إلى **B** من خلال $(a,b) \in R$ إذا كانت **a** ناتجة من **b** بعبارة أخرى :

$$R = \{(\text{بيض, دجاج}),(\text{حليب, بقر}),(\text{حليب, ماعز})\}$$

وفقاً (مع مراعاة الترتيب) بالنسبة للعلاقة : بيض**R** دجاج ، حليب**R**أبقار إلخ.......

(c) لنفرض أنه يمكننا القول عن بلدين أنهما متجاوران إذا كان للبلدين أجزاء من الحدود المشتركة مع بعضها . عندئذٍ "التجاور" هي علاقة **R** على كل البلدان على وجه الأرض و بالتالي $(\text{سويسرا, إيطاليا}) \in R$ و $(\text{المكسيك, كندا}) \notin R$

(d) العلاقة المألوفة (المعروفة) على **Z** (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي **m** تقسم **n**" . الرمز (الكتابة) المعروفة لهذه العلاقة هو أن نكتب $m|n$ عندما **m** تقسم **n** و منه **6|30** و لكن $7\nmid 25$

(e) من بين العلاقات الأساسية المعتبرة في الهندسة : " متوافقة (مطابقة لـ)" و " مشابه لـ" و التي تكون علاقات على مجموعة من الأشكال الهندسية في المستوي . العلاقة "موازي لـ " هي علاقة على مجموعة من الخطوط في المستوي.

(f) لتكن لدينا **A** مجموعة ما . توجد علاقة مهمة على **A** و هي التساوي ، $\{(a,a): a \in A\}$ و التي عادةً نرمز لها بالرمز "=" و تدعى هذه العلاقة أيضاً علاقة تطابق على **A** و في بعض الأحيان يرمز لها أيضاً Δ_A

(g)لتكن لدينا **A** مجموعة ما ، عندها **A×A** و $\emptyset$ هي مجموعتان جزئيتان في **A×A** و هنا العلاقة على **A** تدعى الشاملة و العلاقة الخالية على الترتيب .

٤.٢ التمثيل البياني للعلاقات :

سندرس أولاً العلاقة **S** على المجموعة **R** و التي هي مجموعة الأعداد الحقيقية و هذا يعني أن **S** مجموعة جزئية من $R^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$

و لأن R^2 يمكن تمثيلها بمجموعة النقاط في المستوي ، فإنه بإمكاننا تصوير **S** من خلال تركيز (تأكيد) هذه النقاط في المستوي و التي تنتمي لـ **S** . التمثيل البياني لهذه العلاقة يدعى في بعض الأحيان بيان العلاقة .

بشكل متكرر ، تتألف العلاقة **S** من جميع الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية و التي تحقق المعادلة المعطاة **E(x,y)=0**

-نعرّف عادة العلاقة بمعادلة ، أي أنه بإمكاننا أن نقول أن العلاقة هي $E(x,y) = 0$

مثال ٤.٢ : لنفرض أنه لدينا العلاقة **S** ، المعرفة بالشكل $x^2 + y^2 = 25$ أي أنه تتألف **S** من كل الأزواج المرتبة **(x,y)** و التي تحقق المعادلة المعطاة .

إن بيان هذه المعادلة هو الدائرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات و نصف قطرها كما في الشكل ٢-٢

"عد للرسمة في الصفحة٣ من هذه المحاضرة"

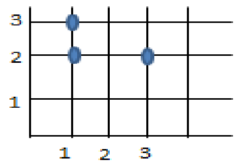
لنفرض الآن أن **A** و **B** مجموعتان منتهيتان :سنسرد ثلاث طرق مختلفة من أجل تمثيل علاقة **R** من **A** إلى **B**.

(i) تمثيل عناصر **A** كنقاط متوضعة على المحور الأفقي ، و تمثيل عناصر **B** كعناصر متوضعة على المحور العمودي . ثم تُمثّل عناصر **A×B** من خلال نقاط تقاطع المستقيمات الأفقية عبر نقاط المجموعة **A** مع نقاط تقاطع المستقيمات العمودية عبر نقاط المجموعة **B** . يدعى هذا التمثيل "التمثيل البياني(الإحداثي)" للمجموعة **A×B**. تُمثّل العلاقة **R** من خلال إضافة تركيز (تأكيد) لهذه النقاط من **A×B** و التي تنتمي إلى المجموعة **R**

(i i) من المتجهة (المصفوفة) المستطيلة و التي أسطرها تمثل جميع العناصر من **A** و تمثل أعمدتها جميع العناصر من **B** . نضع إما **1** أو **0** في كل موضع من المصفوفة تسجل فيما إذا كان $a \in A$ مرتبطة أو غير مرتبطة مع $b \in B$. تدعى هذه المتجهة (المصفوفة) بمصفوفة هذه العلاقة .

(i i i) نكتب عناصر المجموعة **A** و عناصر المجموعة **B** في قرصين منفصلين ثم نرسم سهماً من $a \in A$ إلى $b \in B$ حيث **a** مرتبطة مع **b**.

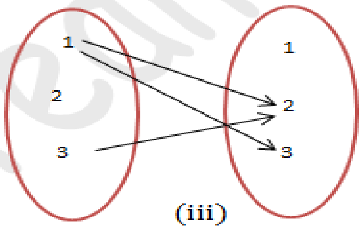
يدعى هذا التمثيل (مخطط الأسهم) لهذه العلاقة



(i)

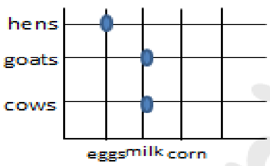
	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

(ii)



(iii)

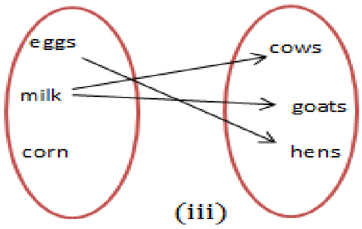
$R = \{(1,2),(1,3),(3,2)\}$



(i)

	cows	goats	hens
Eggs	0	0	1
Milk	1	1	0
corn	0	0	0

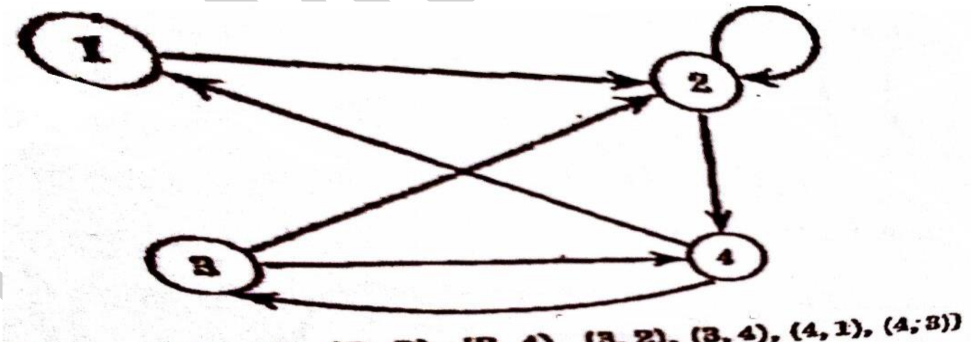
(ii)



(iii)

$R = \{(eggs, hens),(milk, cows),(milk, goats)\}$

-يوجد طريقة أخرى من أجل تمثيل علاقة عندما تكون من مجموعة منتهية إلى نفسها ، نكتب جميع عناصر المجموعة ، ثم نرسم سهماً من العنصر **x** إلى العنصر **y** كلما كان العنصر **x** مرتبط بالعنصر **y** . يدعى هذا التمثيل بالبيان الموجّه (المباشر) من أجل هذه العلاقة - الشكل ٢-٤ يعطينا البيان الموجّه من أجل العلاقة **R** للمجموعة **A={1,2,3,4}** لاحظ أن هنالك سهم من العنصر **2** إلى نفسه لأن العنصر **2** مرتبط بالعنصر **2**.



$R = \{(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

Fig. 2-4

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي