المحاضرة الثامنة: هامة جداً — الاثنين ١٣/صفر/١٤٣٩هـ
٣٠ تشرين ٢٠١٧

مبرهنة (٥): اذا كان A جبري فإن جبر الخارج $A/\mathrm{Rad}A$ نصف بسيط

سنبين ان جبر الخارج لا يحوي اي مثالي حقيقي تبادلي (قابل للحل)
بتعبير آخر سنبين ان اي مثالي قابل للحل في هذا الجبر هو المثالي الصفري
لان المثالي الصفري لا يحوي اي مثالي حقيقي
نفرض ان $I/\mathrm{Rad}A$ مثالي قابل للحل في $A/\mathrm{Rad}A$
ان I مثالي في $\mathbb{R}$ ويحوي $\mathrm{Rad}A$

اصبح لدينا $I/\mathrm{Rad}A$ مثالي قابل للحل حيث $\mathrm{Rad}A$ مثالي قابل للحل
ومنه I مثالي قابل للحل.

من جهة أخرى ان $I \subseteq \mathrm{Rad}A$ لكن $\mathrm{Rad}A \subseteq I$
$$\Rightarrow I/\mathrm{Rad}A = \mathrm{Rad}A$$
اي ان كل مثالي قابل للحل في جبر الخارج هو مثالي صفري
اذن $A/\mathrm{Rad}A$ نصف بسيط

نظرية (٦): A جبري و I مثالي قابل للحل في A
اذا كان A/I نصف بسيط عندئذ $I = \mathrm{Rad}A$

لدينا من الفرض I مثالي قابل للحل في A
ومن جهة أخرى $\mathrm{Rad}A$ مثالي قابل للحل من التعريف
عندئذ $I + \mathrm{Rad}A$ مثالي قابل للحل في A

$I \subseteq I + RadA$

عندئذٍ $I+RadA/I$ مثالي قابل للحل في A/I

ولكن A/I نصف بسيط

$\Rightarrow I+RadA/I = I/I$

$\Rightarrow I+RadA \subseteq I$

ونعلم سابقاً

$I \subseteq I+RadA$

$\Rightarrow I = I+RadA$

ملاحظة: اذا كان $f: A \longrightarrow A$ تشاكلاً غامراً لجبريكي
عندئذٍ الصورة المباشرة لاي مثالي تكون مثالي
ايضاً الصورة المباشرة لاي مثالي قابل للحل هو مثالي
قابل للحل

مبرهنة (٧): اذا كان $f: A \longrightarrow A'$ تشاكل لنيتين جبريتي
وهو غامر عندئذٍ $f(RadA) = RadA'$

$\psi : A/RadA \longrightarrow A'/f(RadA)$ لنكمل التطبيق

$\psi(x+RadA) \longrightarrow f(x) + f(RadA)$

وسنبرهن انه تشاكل

Galaxy

٤٢

$\star$ $\psi\big((x+Rad A)+(x'+Rad A)\big) =$
$\psi\big((x+x')+Rad A\big) =$
$f(x+x') + f(Rad A) =$
$\big(f(x)+f(Rad A)\big)+\big(f(x')+f(Rad A)\big) =$
$\psi(x+Rad A) + \psi(x'+Rad A)$

$\star$ $\psi\big(\lambda(x+Rad A)\big) = \psi(\lambda x + Rad A)$
$= f(\lambda x) + f(Rad A)$
$= \lambda\big(f(x) + f(Rad A)\big)$
$= \lambda\, \psi(x+Rad A)$

$\star$ $\psi[x+Rad A, y+Rad A] =$
$\psi[(x,y)+Rad A] =$
$f([x,y]) + f(Rad A) =$
$[f(x), f(y)] + f(Rad A) =$
$[f(x)+f(Rad A, f(y)+Rad A] =$
$[\psi(x+Rad A), \psi(y+Rad A)]$

عندئذ ψ تشاكل وسيطي انغامر .

لتكن $x'+f(Rad A) \in A'/f(Rad A)$

$\exists x \in A \;;\; f(x) = x'$
$\Rightarrow x'+f(Rad A) = f(x)+f(Rad A)$
$= \psi(x+Rad A)$

ومنه $\exists x+Rad A \in A/Rad A$

Galaxy

/ /

$$\psi(x+\mathrm{Rad}A) = x' + f(\mathrm{Rad}A)$$
$$= \psi(x+\mathrm{Rad}A)$$

ومنه نستنتج ان ψ تشاكل العناصر بين حيري لي

$f: A \longrightarrow A'$

تذكرة: مبرهنة التماثل الاولى $A/\ker f \cong \mathrm{Im} f$

استناداً الى مبرهنة التماثل الاولى

$$\frac{A/\mathrm{Rad}A}{\ker\psi} \cong \mathrm{Im}\psi = A'/f(\mathrm{Rad}A)$$

لدينا $A/\mathrm{Rad}A$ هو جبر لي نصف بسيط حسب مبرهنة سابقة

ومنه $\frac{A/\mathrm{Rad}A}{\ker\psi}$ جبر لي نصف بسيط لأن جبر الخارج لجبر لي نصف البسيط يكون نصف بسيط.

ومنه $A/\mathrm{Rad}A$ جبر لي نصف بسيط

لكن الصورة المباشرة لتشاكل قابل للحل هي تشاكل قابل للحل

بالاعتماد على نظرية سابقة $f(\mathrm{Rad}A) = \mathrm{Rad}A$

جبر لي العام وجبوره الجزئية. $GL(n, \mathbb{C})$ مصفوفات من مرتبة n عناصرها من $\mathbb{C}$

الجبور الجزئية

* $sL(n,\mathbb{C}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \quad tr(M) = 0\}$

tr (اي مجموع عناصر القطر الرئيسي)

* $t(n,\mathbb{C}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \quad M \text{ مثلثية عليا}\}$

يمكننا التأكد ان sL , t تشكل جبر جزئي من $M_n(\mathbb{C})$.

Galaxy

* $\gamma(n,\mathbb{K}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C})$; مثلثية عليا $M\}$
وعناصر القطر الرئيسي متساوية

* $\phi(n,\mathbb{K}) = \{M \in GL(n,\mathbb{K})$ مثلثية عليا تماما $M\}$
وعناصر القطر الرئيسي معدومة

سؤال: تحقق من $[sL, sL] \subseteq sL$ من اجل $n=2$

لتكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ad+bf & ae-bd \\ cd+af & ce+ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} da+ec & db-ae \\ fa-dc & fb+ad \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} bf-ec & 2(ae-bd) \\ 2(cd-af) & ce+fb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in SL$$

سؤال وظيفة: اعد السؤال السابق من اجل $n=3$

ملاحظة: * كل مثال في ميركي هو مير جزئي
لكن العكس غير صحيح بالضرورة

* ان المجموعات الأربعة السابقة تمثل ميور جزئية
وكل منها مثال

وهنا يتكون لدينا مثال على انه ليس بالضرورة ان يكون
الحب الجزئي هو مثالي في ميركي

انتهت المحاضرة الثامنة

الصاحب الذي لا ينفعك في حياتك

لا ينفعك بعد مماتك

Galaxy

المحاضرة التاسعة . الاثنين ١٧ صفر ١٤٣٩هـ
٦ تشرين ٢٠١٧م

مثال(١) ليكن $t(2,\mathbb{C})$ هل هو مثالي في $GL(2,\mathbb{C})$

$$[GL(2,t), t(2,t)] \subseteq t(2,\mathbb{C})$$

لنفرض

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in t(2,\mathbb{C})$$

$$[A,B]=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in t(2,\mathbb{C})$$

نلاحظ ان $t(2,\mathbb{C})$ جبر جزئي لكنه ليس مثالي في $GL(2,\mathbb{C})$

مثال(٢) ادرس $t(2,\mathbb{C})$ من اجل

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A,B]=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin t(2,\mathbb{C})$$

وهنا يؤكد انه ليس بالضرورة ان كل جبر جزئي ليس مثالي

تعريف جبر لي البسيط هو جبر لي غير تبادلي ولا يحوي اي مثالي حقيقي

هام تمرين: لنأخذ جبر لي $sL(2,\mathbb{C})$ ولنفرض ان

$$e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \qquad h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

قاعدة لهذا الفضاء.

والمطلوب

① اوجد مصفوفة تطبيقات الاشتقاق الداخلية ad_h , ad_f , ad_e بالنسبة للقاعدة المذكورة.

② بين فيما اذا كان $sL(2,\mathbb{C})$ بسيط.

$$ad_e : sL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow sL(2,\mathbb{C}) \qquad \boxed{1}$$

$$ad_e(e)=[e,e]=0=0e+0f+0h.$$

$$ad_e(f)=[e,f]=ef-fe$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=0e+0f+h.$$

$$ad_e(h)=[e,h]=eh-he$$

$$=-2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=-2e.$$

$$=-2e+0f+0h.$$

وبالتالي تكون مصفوفة تطبيق الاشتقاق الداخلي ad_e هي

$$M_{ad_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

بنفس الاسلوب نجد

$$M_{ad_f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{ad_h} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

يمكننا ان نلاحظ الجدول التالي.

[,]	e	f	h
e	0	h	$-2e$
f	$-h$	0	$2f$
h	$2e$	$-2f$	0

[٢] نلاحظ ان $sl(2,\mathbb{C})$ غير تبادلي وذلك من الجدول السابق
والآن علينا اثبات انه لا يوجد مثالي حقيقي في sl

من جهة أخرى لنفرض ان J مثالي غير صفري في هذا الجبر ولنبرهن
$$J = sl(2,\mathbb{C})$$
J يحوي على الاقل عنصر من عناصر القاعدة ولنفرض ما يلي.

لنفرض ان $e \in J$ عندئذ

$$\left.\begin{array}{l}[e, f] = h \in J \\ e \in J \quad f \in sL\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}[h, f] \in J \\ f \in J\end{array}\right.$$

عندئذ J يحوي جميع عناصر القاعدة .
ومنه $J = sL(2, \mathbb{C})$
حيث
اي مثالي في $sL(2,\mathbb{C})$ اذا احتوى جميع
عناصر القاعدة فهو يحوي اي عنصر من
الجبر فهو جبر لان الجبر يحوي المثالي
وبذلك تحقق المساواة .

J مثالي غير صفري فهو جبر جزئي
من جبري وبالتالي كل عنصر به
هنا الجبر يكتب كتركيب خطي وحيد
من عناصر القاعدة .

\# لنفرض ان $f \in J$ عندئذ بنفس الاسلوب نجد ان $e, h \in J$
$\Rightarrow J = sL(2, \mathbb{C})$

\# لنفرض ان $h \in J$ عندئذ وبنفس الاسلوب نجد ان $e, f \in J$
$\Rightarrow J = sL(2, \mathbb{C})$

يتضح من ذلك ان $sL(2, \mathbb{C})$ جبري العقدي غير التبادلي ولا يحوي
اي مثالي حقيقي فهو بسيط .

مركز جبري هو مجموعة العناصر من A التي تحقق خاصية الابدال مع جميع
عناصر A

$Cen(A) = \{ x \in A \quad [x, y] = 0 \quad \forall y \in A \}$.

مبرهنة (1) ان مركز جبري A يكون مثاليا في A

$Cen\, A \neq \phi \qquad 0 \in Cen\, A \qquad [0, z] = 0 \quad \forall z \in A$

ولنبرهن

$x, x' \in Cen\, A \qquad \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha x + \beta x' \in Cen\, A$

$[\alpha x+\beta x', y]=0$ محققة استناداً لمفهوم مركز جبر لي

علينا اثبات $[A, Cen\,A] \subseteq Cen\,A$

لنأخذ $x \in Cen\,A$ و $y \in A$ ولنبرهن ان $[y, x] \in Cen\,A$

اي يجب ان تتحقق $[[y, x], z]=0$ $z \in A$

$$L_1 = [[y,x],z] = [z,[x,y]]$$
$$= -[x,[y,z]] - [y, \underbrace{[z,x]}_{=0}] = 0$$

$x \in Cen\,A$ $y, z \in A$

مبرهنة (٧): ان مركز جبر لي $Cen\,A$ هو مثالي مميز في A.

من الواضح ان $Cen\,A$ مقاس جزئي منه A وحتى يتم المطلوب يكفي ان نبرهن انه مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاقات الداخلية على A

$$ad_x\,(Cen\,A) \subseteq Cen\,A$$

لتكن $y \in Cen\,A$ ولنبرهن $[x, y] \in Cen\,A$

بتعبير آخر $[[x,y],z]=0$

$$[[x,y],z] = -[z,[x,y]]$$
$$= \underbrace{[x,\underbrace{[y,z]}_{=0}]}_{=0} + [\underset{\in Cen\,A}{y},[z,\underset{\in A}{x}]] = 0$$

الممركز في جبر لي: A جبر لي و S مجموعة جزئية منه A عندئذ: ممركز المجموعة الجزئية S هو مجموعة العناصر المتبادلة مع جميع عناصر S

Galaxy

٥١

$Cen_A S = \{x \in A \quad [x, \Delta] = 0 \quad ; \Delta \in S\}$

حالة خاصة في حال $S = A$ فإن $Cen A = Cen_A S$
يتطابق مفهوم المركز والممركز

مبرهنة (٢) إن ممركز اي مجموعة جزئية S من جبري A يكون جبراً جزئياً منه A

$Cen_A S = \{x \in A \quad [x, \Delta] = 0 \quad \Delta \in S\}$

دكتيا ان نبرهن ان هذه المجموعة هي جبر جزئي منه A

$Cen_A S \neq \phi \quad 0 \in Cen_A S \quad [0, \Delta] = 0 \quad \Delta \in S$

ولنبرهن ان $\alpha x + \beta x' \in Cen_A S$

اي $[\alpha x + \beta x', \Delta] = 0 \quad \Delta \in S$

ليكن $\Delta \in S$

$[\alpha x + \beta x', \Delta] = \alpha \overbrace{[x, \Delta]}^{=0} + \beta \underbrace{[x', \Delta]}_{=0}$

$= \alpha(0) + \beta(0) = 0$

لنبرهن الآن $[Cen_A S, Cen_A S] \subseteq Cen_A S$

اي $[[x, y], \Delta] = 0 \quad \forall \Delta \in S$

$l_1 : [[x, y], \Delta] = -[\Delta, [x, y]]$

$= [x, [y, \Delta]] + [y, [\Delta, x]] = 0$

ممركز المثالي : ليكن J مثالي جزئي في A حيث

$Cen_A J = \{x \in A \quad [x, \Delta] = 0 \quad \Delta \in J\}$

Galaxy

/ /

تمرين (١١) برهن ان ممركز اي مثالي مميز في جبر لي A يكون مثالي مميز.

وضوحاً ان $Cen_A J$ مقاساً جزئياً منه A

ولنبرهن ان $d(Cen_A J) \subseteq Cen_A J$

$y \in Cen_A J$ $\quad$ $d(y) \in Cen_A J$

$[dy, x] = 0 \quad x \in J$

اذا كان $d \in Der A$ و $y \in Cen_A J$

$\forall x \in J \quad d[x, y] = [dx, y] + [x, dy]$

استناداً الى كون $[x, y] = 0$ فإن

$[dx, y] = [x, dy] = 0$

$; dx \in J \quad y \in Cen_A J$

$\Rightarrow dy \in Cen_A J$

ومنه $Cen_A J$ مثالي مميز في A

التمثيل المرافق لجبر لي على حقل

ليكن A جبر لي على حقل k ولنأخذ التطبيق .

$ad: A \longrightarrow GL(A)$

$GL(A)$ جبر لي مكون من مجموعة من التشاكلات في A

ان التطبيق ad معرف بالشكل $x \longrightarrow ad(x) = ad_x$

نعلم ان $Inn(A) \subseteq Der(A) \subseteq GL(A)$

نلاحظ ان $Inn(A) = Im(ad)$

/ /

مبرهنة (٣٠) ليكن التطبيق $ad: A \longrightarrow GL(A)$ تمثيل جبري

عندئذ ad تشاكل بين جبري A و $GL(A)$

لنبرهن ان

$-\quad ad(x+y) = ad(x) + ad(y)$

$-\quad ad_{(x+y)} = ad_x + ad_y$.

لنفرض ان $z \in A$ عندئذ

$$ad_{x+y}(z) = [x+y, z]$$
$$= [x, z] + [y, z]$$
$$= ad_x(z) + ad_y(z)$$
$$= (ad_x + ad_y)(z).$$

وقد اثبتنا بقية الشروط مسبقاً

عندئذ ad تشاكل بين جبري A و $GL(A)$

التمثيل المرافق لجبر لي: هو كل تشاكل من النمط السابق.

ملاحظة: ان نواة التمثيل المرافق هي $Ker(ad) = Cen\ A$

انتهت المحاضرة التاسعة.

الحياة سريعة وسيفوتك الكثير إن اختفيت في كل مرة لتجمع ما تساقط منك