نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة: الخامسة عشر

عنوان المحاضرة: الفضاء المنظم

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- امثلة على فضاءات منظمة
2- الفضاء المنظم التام
3- تمهيدية لاتغير الانسحاب

بسم الله الرحمن الرحيم

بدأنا في محاضرتنا الماضية بتعريف دالة النظيم والفضاء المنظم وسنتابع اليوم في بحث الفضاءات المنظمة وسنرى أنه يوجد لدينا فضاءات منظمة تامة (باناخ)وأخرى غير تامة . والأن لنبدا بمحاضرتنا ..

- درسنا سابقاً أن كل فضاء منظم هو فضاء متري اي يمكننا أن نستخلص مترك من كل نظيم ومن المساواة التالية :

$$d(x,y)=||x-y||$$

ولنثبت أن هذا التابع هو تابع مسافة أي لنتحقق من الشروط الأربعة :

1-$d(x,y)=||x-y||\geq 0$ (محقق حسب تعريف النظيم)

2-$d(x,y)=0 \iff ||x-y||=0 \iff x-y=0 \iff x=y$

3-$d(x,y)=||x-y||=||(-1).(y-x)||=|-1|.||y-x||$

$=||y-x||=d(y,x)$ (التناظر شرط تحقق)

4-$d(x,y)=||x-y||=||x-z+z-y||\leq ||x-z||+||z-y||$

$$=d(x,z)+d(z,y)$$

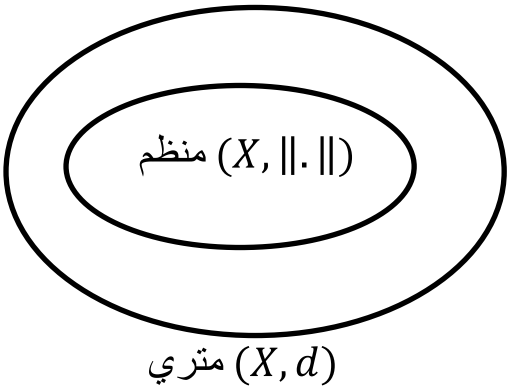
$\Longrightarrow d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

مما سبق نجد تحقق الشروط الأربعة محققة ومنه d مترك

⇐ إذن أثبتنا أن كل نظيم يولد مترك وفق المساواة السابقة

نتيجة : إذن كل فضاء منظم هو فضاء متري وكل شئ يصح في الفضاءات المترية من (تعاريف – خواص –مبرهنات – نتائج ....) يصح في الفضاءات المنظمة والعكس ليس بالضرورة صحيح اي ليس كل ما يصح في الفضاءات المنظمة يصح في الفضاءات المترية .

((يمكننا القول أن الفضاءات المنظمة هي حالة خاصة من الفضاءات المترية))



سؤال : انطلاقاً من متباينة المثلث في خواص النظيم $((\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|))$ استنتج الدستور التالي :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

الحل :

$$x = x + y - y \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{نأخذ نظيم الطرفين}} \|x\| = \|x+y-y\| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\| + \|x-y\|$$

$$\Longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \quad \dots.(1)$$

من جهة أخرى

$$y = y + x - x \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{نأخذ نظيم الطرفين}} \|y\| = \|y+x-x\| \Longrightarrow \|y\| \leq \|x\| + \|y-x\|$$

$$\Longrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \underbrace{\|y-x\|}_{\|x-y\|}$$

$$\Longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \quad \dots.(2)$$

من (1)و(2) نجد أن $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \dots (*)$

اعتمدنا على الخاصة

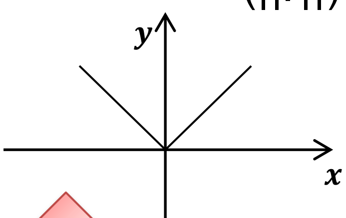
$$\left\{\begin{matrix} x \leq y \\ -x \leq y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x| \leq y$$

سؤال: اثبت أن دالة القيمة المطلقة المعرفة كالتالي :

$$|.|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto |x|$$

هي دالة مستمرة (بلغة ε, δ) ثم استنتج صحة هذا الاستمرار من اجل دالة نظيم $(\|.\|)$

الحل: إن الخط البياني لدالة القيمة المطلقة هو كالتالي



نلاحظ أن الخط البياني للدالة $|.|$ مستمرة على $\mathbb{R}$

حيث أنه لا يوجد انقطاع أثناء رسمه لكننا سنثبت حسب التعريف :

-حتى تكون الدالة $|.|$ مستمرة عند النقطة (x_0) من $\mathbb{R}$ يجب أن يتحقق الشرط الثاني

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta > 0 \quad ; |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \varepsilon$$

بالاعتماد على خاصة $\qquad ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$

باختيار $\delta = \varepsilon$ نجد:

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta = \varepsilon > 0 \ ; |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow ||x| - |x_0|| < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

إذن تحقق تعريف الاستمرار ومنه $|.|$ مستمر على $\mathbb{R}$

بنفس الأسلوب تماماً باستبدال القيمة المطلقة بالنظيم نجد أن دالة النظيم مستمرةعلى الفضاء X (المتجهي).

إذن دالة النظيم :

$$\|.\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x\|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta = \varepsilon \ ; \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| \underset{\text{اعتمدنا على الخاصة}(*)}{\leq} \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$$

تم المطلوب

ملاحظة : في $\mathbb{R}$ تنطبق دالة النظيم على دالة القيمة المطلقة

والآن سنورد بعض الامثلة على الفضاءات المنظمة:

1-الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء منظم بالنسبة لدالة النظيم المعرفة بالمساواة .

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + |\xi_n|^2}$$

وإن هذا النظيم يولد مترك معرفاً بالمساواة التالية :

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+\cdots\ldots\ldots\ldots.+|\xi_n-\eta_n|^2}$$

حيث $y=(\eta_i),x=(\xi_i)\in\mathbb{R}^n$ (حيث $i=1,\ldots\ldots,n$)

2-الفضاء $\boldsymbol{\ell}^{\boldsymbol{p}}$ هو فضاء منظم حيث النظيم يعطى كالتالي :

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ويولد هذا النظيم المترك المعرف بالعلاقة التالية :

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $y=(\eta_i),x=(\xi_i)\in\ell^p$ (حيث $i\geq 1$)

3-الفضاء $\boldsymbol{\ell}^{\infty}$: حيث النظيم يعطى بالعلاقة التالية :

$$\|x\|=\underbrace{\sup}_{i\geq 1}|\xi_i|$$

والمترك المولد من هذا النظيم هو $d(x,y)=\|x-y\|=\underbrace{\sup}_{i\geq 1}|\xi_i-\eta_i|$

حيث $y=(\eta_i),x=(\xi_i)\in\ell^{\infty}$

4- الفضاء $C[a,b]$: حيث النظيم بالعلاقة :

$$\|x\|=\underbrace{\max}_{a\leq t\leq b}|x(t)|$$

وإن المترك المولد من هذا النظيم $d(x,y)=\|x-y\|=\underbrace{max}_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$

حيث $x,y\in C[a,b]$

• الفضاءات المنظمة التامة وغير التامة :

نقول عن فضاء منظم أنه تاماً إذا كان تاماً بخصوص المترك المولد من هذا النظيم (لأن كل نظيم يولد مترك)

أمثلة : $\mathbb{R}^n$ ، ℓ^∞ ، ℓ^p تامة بخصوص المترك الاقليدي المعرفة عليها

وكذلك $C[a,b]$ تام بخصوص المترك $d(x,y) = \underbrace{\max}_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)|$

أما إذا كان الفضاء المنظم غير تاماً بخصوص المترك المولد من هذا النظيم عندها نقول عن أن الفضاء المنظم غير تام

أمثلة : الفضاء $C[a,b]$ غير تام بخصوص المترك $d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, d(t)$

<<بمعنى أخر يمكننا ان ننطلق من فضاءات مترية غير تامة ونحصل مباشرة على فضاءات منظمة غير تامة >>

. لا بد من الإشارة إلى أن كل فضاء منظم غير تام يمكن إتمامه وسنتناول الان مثالاً على ذلك

مثال : ليكن لدينا الفضاء $C[a,b]$ فضاء الدوال المستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ ولنزوده بالدالة التالية :

$$\|.\|: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x\| = \left(\int_a^b (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

لنثبت في البداية أن $\|.\|$ هي دالة نظيم .

لنتحقق من شروط النظيم الأربعة :

$$\forall x, y \in C[a,b] \qquad ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

1- $\|x\| = \left(\int_a^b (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} \ \geq 0$

2- $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \left(\int_a^b (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ محقق: (الدالة الصفرية) دالة تصور جميع النقط بالصفر

3- $\|\alpha x\| = \left(\int_a^b (\alpha x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b (\alpha)^2 (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{(\alpha)^2}\left(\int_a^b (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\left(\int_a^b (x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$$

4- $\|x+y\| = \left(\int_a^b ((x+y)(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\underset{\text{كونها دوال مستمرة}}{\underbrace{=}} \left(\int_a^b (x(t)+y(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

لدينا حسب متراجحة مينكوفسكي من أجل $p=2$ نجد

$$\int_a^b \left((x(t)+y(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} \le \int_a^b \left((x(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b \left((y(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

إذن تحققت الشوط الأربعة ومنه $\|.\|$ هي دالة نظيم على الفضاء المتجهي $C[a,b]$

وبالتالي فإن $(C[a,b],\|.\|)$ هو فضاء منظم ولكنه غير تام لأنه غير تام بخصوص المترك المولد من هذا النظيم .

$$(1) \ldots\ d(x,y) = \|x-y\| = \left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2 d(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

وللإثبات يمكن اتباع خطوات البرهان الورادة في المحضرة الثانية عشر حيث يستعاض عن المترك سابقاً بالمترك الحالي وأيضاً باستبدال المجال $[0,1]$ بالحالة العامة $[a,b]$ بنفس الخطوات نستطيع إيجاد كوشية غير متقاربة ضمن هذا الفضاء ونهاية هذه المتتالية الكوشية هي دالة قابلة للمكاملة ولكنها غير مستمرة إذن هذه الكوشية غير متقاربة ضمن هذا الفضاء اذاً الفضاء غير تام بخصوص المترك المعرف عليه

-وكما ذكرنا أن كل فضاء تام يمكن اتمامه فإن هذا الفضاء $C[a,b]$ بخصوص هذا المترك الحالي يمكن إتمامه بالإعتماد على مبرهنة الإتمام التي مرت معنا سابقاً ولنرمز لهذا الإتمام $L^2[a,b]$ هو الفضاء المتمم للفضاء $C[a,b]$ بخصوص المترك (1)

وبالتالي فإنه من تكامل لوبيك يمكن الحصول أيضا على الفضاء $L^p[a,b]$ والنظيم معرف بالدستور:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p d(t)\right)^{\frac{1}{p}}$$

بطريقة مباشرة باستعمال تكامل لوبيك ودوال x القيوسة وفق لوبيك على $[a,b]$ بحيث يكون التكامل لوبيك للدالة $|x|^p$ على $[a,b]$موجوداً ومنتهياً وعناصر $L^p[a,b]$ تكون عندئذٍ صفوف تكافؤ لهذه الدوال حيث x يكون مكافئاً لـ y إذا كانت تكامل لوبيك لـ $|x-y|^p$ على $[a,b]$ مساوياً للصفر.

تمهيدية (لاتغير الانسحاب):

كل مترك d مولد من نظيم على فضاء منظم X يجب ان يحقق الخاصتين :

$$1- \quad d(x+a,y+a) = d(x,y)$$
$$2- \quad d(\alpha x,\alpha y) = |\alpha| d(x,y)$$

أيا كانت العناصر a,y,x من X وأياً كان العدد a .

البرهان : لدينا

$$d(x+a,y+a) = \|(x+a)-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

$$d(\alpha x,\alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\|x-y\| = |\alpha| d(x,y)$$ تم المطلوب

الكرة الواحدية في فضاء منظم :

1- ندعو المجموعة $S(0;1) = \{x \in X\,;\|x\| = 1\}$

كرة واحدية مركزها (0) ونصف قطرها (1)(أحياناً ندعوها القشرة الكروية)

2- وندعو المجموعة $B(0;1) = \{x \in X\,;\|x\| \le 1\}$

كرة واحدية مغلقة مركزها (0) ونصف قطرها (1)

3-وندعو المجموعة $\mathrm{A}(0;1) = \{x \in X\,;\|x\| < 1\}$

كرة واحدية مفتوحة مركزها (0) ونصف قطرها (1)

سؤال 3: لتكن لدينا X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الزواج المرتبة $x = (\xi_1,\xi_2)$ من الاعداد الحقيقية .لدينا النظائم التالية :

$$1\text{-}\|x\|_1 = |\xi_i| + |\xi_2|$$

$$2\text{-}\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$3\text{-}\|x\|_3 = \max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}$$

$$4\text{-}\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}}$$

مثل كل نظيم بكرة واحدية .

الحل :

-1 الكرة الواحدية الممثلة لهذا النظيم هي بالشكل :

$$S_1(0;1) = \{x \in X \,; |\xi_1| + |\xi_2| = 1\}$$

نناقش عدة حالات :

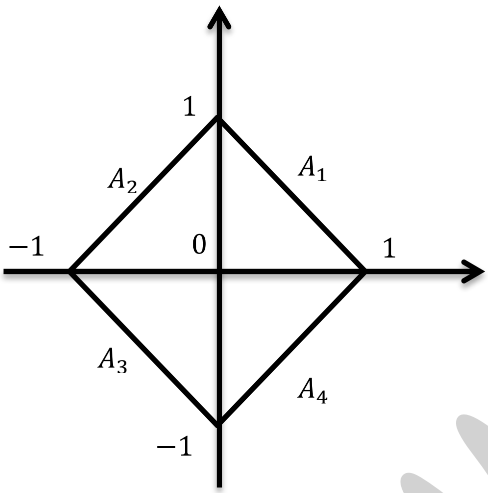
كلا من ξ_1, ξ_2 موجبين نحصل على المستقيم A_1

ξ_1 سالبة و ξ_2 موجبة نحصل على A_2

ξ_1 سالبة و ξ_2 سالبة أيضاً نحصل على A_3

ξ_1 موجبة و ξ_2 سالبة نحصل على A_4

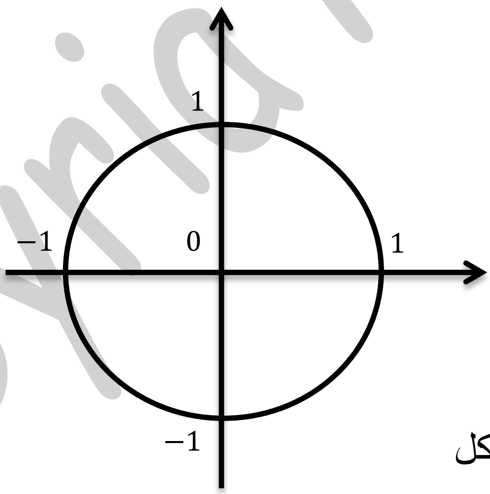
ومنه تكون الكرة الواحدية الممثلة لهذا النظيم بالشكل :



-2 الكرة الواحدية الممثلة للنظيم الثاني تكون :

-3 $S_2(0;1) = \left\{x\epsilon X \,; \,(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}} = 1\right\} = \{x\epsilon X \,; \,\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\}$

وهي تمثل كرة مركزها 0 ونصف قطرها 1



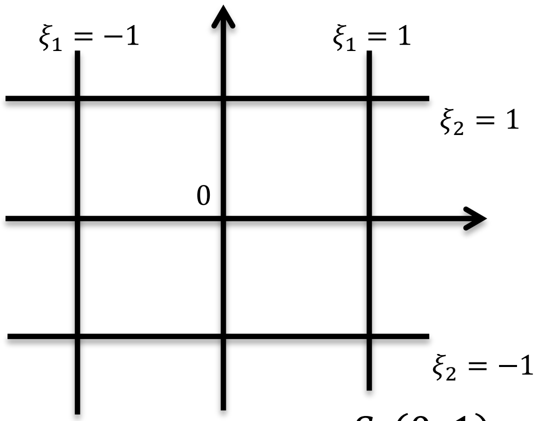
-4 الكرة الواحدية الممثلة للنظيم الثالث تعطى بشكل

$$S_3(0;1) = \{x\epsilon X \,; max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} = 1\}$$

نناقش حالتين

- إذا كان Max هو $|\xi_1|$ عندئذٍ $|\xi_1| = 1$ عندئذ إما $\xi_1 = 1$ او $\xi_1 = -1$) مستقيمات توازي المحور oy)
- إذا كان Max هو $|\xi_2|$ عندئذٍ $|\xi_1| = 1$ عندئذ إما $\xi_2 = 1$ او $\xi_2 = -1$) مستقيمات توازي المحور ox)

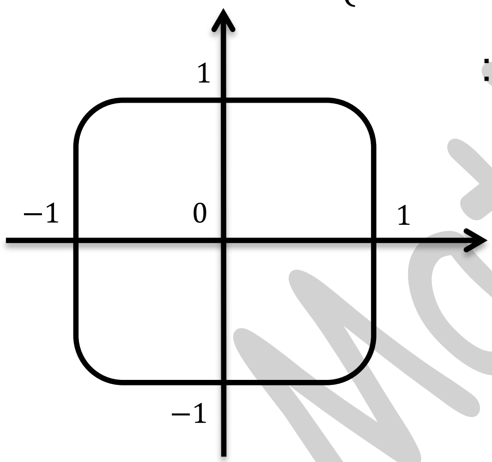
وتكون الكرة الواحدية كما هو موضح بالشكل :



5- إن الكرة الواحدية الممثلة لهذا النظيم هي من الشكل

$$S_4(0;1) = \left\{x\epsilon X\,;(\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}} = 1\right\} = \{x\epsilon X\,;\xi_1^4 + \xi_2^4 = 1\}$$

وهي معادلة كرة مضغوطة كما هو ووضح بالشكل :



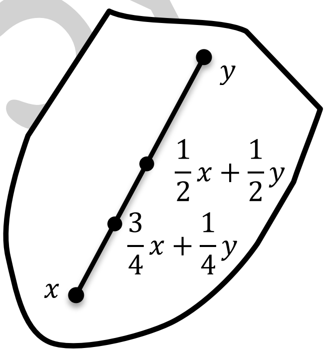
- تعريف المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة جزئية A من فضاء متجهي إنها محدبة إذا اقتضى وقوع أي نقطتين y و x من A تتحقق العلاقة :

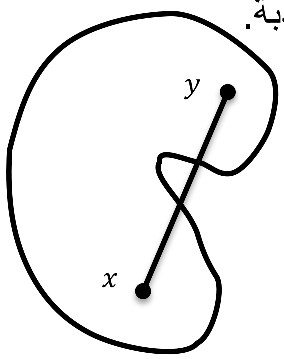
$$M = \{z \in X\,; z = \alpha x + (1-\alpha)y\,; 0 \le \alpha \le 1\} \subset A$$

تدعى M قطعة مستقيمة مغلقة حداها النقطتان x, y وتدعى كل نقطة أخرى من z نقطة داخلية في M

مثال على مجموعة محدبة وأخرى غير محدبة.



(محدبة)



(غير محدبة)

ملاحظة :

استطعنا تعريف النقطة المستقيمة M في الفضاء المنظم كونه مزود ببنية جبرية إضافة إلى البنية الطبولوجية بينما لانستطيع تعريف هذه القطعة المستقيمة في الفضاء المتري كون الفضاء المتري مزود ببنية طبولوجية فقط ((اي بمعنى أخر الضرب بعدد والطرح والجمع كل هذه العمليات التي نراها بتعريف القطعة المستقيمة Mغير معرفة في الفضاء المتري))

- ***تعريف المجموعة المحدودة :*** إن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم X محدودة هو أن يوجد عدد موجب c بحيث تحقق المتباينة $\|x\| \leq c$ أيا كان x من M

(مع ملاحظة أن $\|x\| \leq c$ هي معادلة كرة مركزها (0) ونصف قطرها c)

إي بمعنى أخر استطعنا إيجاد كرة مفتوحة (أو مغلقة) مركزها الصفر ونصف قطرها مناسب تحوي المجموعة عندها تكون المجموعة M محدودة .

انتهت المحاضرة