2017-11-22

نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الرابعة عشر عنوان المحاضرة : المتتاليات والمتسلسلات العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ خواص نهاية متتالية

٢ـ المتسلسلات العقدية

٣ـ تقارب متسلسلة عقدية

٤ـ المتسلسلة الهندسية العقدية

حل وظيفة المحاضرة السابقة :

مبرهنة كل متتالية متقاربة محدودة

البرهان:

بفرض أن $\{z_n = x_n + i\ y_n\}$ متتالية متقاربة

$\Leftarrow$ $\{x_n\}, \{y_n\}$ متقاربتان

$\Leftarrow$ $\{x_n\}, \{y_n\}$ محدودتان (حسب مبرهنة سابقة)

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ محدودة (حسب مبرهنة سابقة)

مبرهنة كل متتالية متقاربة كوشية

البرهان: بفرض أن $\{z_n = x_n + i\ y_n\}$ متتالية متقاربة

$\Leftarrow$ $\{x_n\}, \{y_n\}$ متقاربتان في $\mathbb{R}$ ، ونعلم أن كل متقاربة في $\mathbb{R}$ كوشية

$\Leftarrow$ $\{x_n\}, \{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,;\exists N \geq 0\,;m\,,n \geq N \Rightarrow \begin{cases} |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |y_m - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|z_m - z_n| = |(x_m - x_n) + i\,(y_m - y_n)|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{حسب خواص الطويلة}} \quad |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ كوشية

مبرهنة: أثبت أن $\mathbb{C}$ فضاء تام (أثبت أن كل متتالية كوشية متقاربة)

البرهان:

بفرض أن $\{z_n = x_n + i\,y_n\}$ متتالية كوشية في $\mathbb{C}$ عندئذ تحقق :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,;\exists N \geq 0\,;m\,,n \geq N \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_m - x_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon \\ |y_m - y_n| \leq |z_m - z_n| < \varepsilon \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

ونعلم أن $\mathbb{R}$ فضاء تام

$\Leftarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ متقاربتان في $\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متقاربة في $\mathbb{C}$

والأن سنبدأ بمحاضرتنا

والأن سنبدأ بمحاضرتنا

خواص نهاية متتالية

١ - مجموع متتاليتين متقاربتين متتالية متقاربة ونهايتها تساوي مجموع النهايتين العكس غير صحيح في الحالة العامة (قد توجد متتاليتين المجموع لهما متتالية متقاربة و هما غير متقاربتين)

مثال: $\left\{\underbrace{(-1)^n}_{\text{متباعدة}} + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{متباعدة}}\right\} = \underbrace{\{0\}}_{\text{متقاربة}} \longrightarrow 0$

* مجموع متتاليتين متباعدتين متقاربتين

ملاحظة :لو كان مجموع متتاليتين متقاربتين متقاربة و إحدى المتتاليتين متقاربة فإن الأخرى ستكون متقاربة أيضاً

٢ - إذا كان λ ثابتاً عقدياً غير معدوم فإن $\{3_n\}$ متقاربة $\longleftrightarrow$ $\{\lambda 3\}$ متقاربة $(\lambda \neq 0)$

وفي حال التقارب $\lim_{n\to\infty}(\lambda 3) = \lambda(\lim_{n\to\infty}(3_n))$

٣ -جداء متتاليتين متقاربتين متتالية متقاربة من جداء النهايتين والعكس غير صحيح في الحالة العامة (تقاربها كالمتتالية حقيقية $\Longleftrightarrow$ تقارب) كمثال معاكس : $\underbrace{\{n\}}_{\text{متباعدة}\infty}$ $\underbrace{\left\{\frac{1}{n}\right\}}_{0\ \text{متقاربة}}$

إلا أن $\left\{n \cdot \frac{1}{n}\right\} = \{1\} \longrightarrow 1$(متقاربة)

٤ -مقلوب متتالية متقاربة من عدد غير معدوم هي متتالية متقاربة من مقلوب النهاية

$$3_n \longrightarrow a \neq 0 \underset{\text{فإن}}{\Longrightarrow} \frac{1}{3_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$$

٥ -حاصل قسمة متتاليتين متقاربتين (شرط أن تكون نهاية المقام غير معدوم)هي متتالية متقاربة ونهايتها تساوي نهاية البسط على نهاية لمقام

$$\lim \frac{3_n}{W_n} = \frac{\lim 3_n}{\lim W_n}$$

ملاحظة : في المتتاليات n دائما تسعى إلى ∞

٦ - $\frac{1}{3_n} \longrightarrow \infty \Longleftrightarrow 3_n \longrightarrow 0$

$$\frac{1}{3_n} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow 3_n \longrightarrow \infty$$

٧-إن حذف عدد منتهي من حدود متتالية أو إضافة عدد منته إلى حدود متتالية لا يؤثر على طبيعة متتالية ولا على نهايتها في حال التقارب

اختبار المقارنة :

لتكن $\{3_n\},\{W_n\}$ متتالية بحيث يتحقق

$$\exists N;\ \forall m,n > N\ ; |3_m - 3_n| < |W_m - W_n|$$

عندئذ تقارب $\{W_n\}$ يقتضي تقارب $\{3_n\}$

المتسلسلات العقدية

لتكن $\{3_n\}$ متتالية عقدية حيث

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \supseteq A = \{n_0, n_{0+1}, \dots, n, ..\}$$

نسمي المجموعة من الشكل :

$$3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n + \cdots$$

متسلسلة عقدية حدها العام 3_n ونرمز لها $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$

كما نسمي الحد الأول للمتسلسلة

*متتالية المجاميع الجزئية (النونية) للمتسلسلة :

لتكن $\{S_n\}$ متتالية عقدية معرفة كما يلي :

$$S_{n_0} = 3_{n_0}$$

$$S_{n_0+1} = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} = S_{n_0} + 3_{n_0+1}$$

$$S_{n_0+2} = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + 3_{n_0+2} = S_{n_0+1} + 3_{n_0+2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_{n-1} + 3_n = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n = \sum_{k=n_0}^{n} 3_k$$

(s_n عبارة عن مجموع الحدود من الحد الأول إلى الحد النوني)

نسمي المتتالية s_n متتالية المجاميع الجزئية (النونية) للمتسلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$

تقارب متسلسلة عقدية

نقول عن المتسلسلة عقدية 3_n أنها متقاربة وأن مجموعها يساوي S إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها s_n متقاربة من S وفي حال التقارب نكتب $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n = S$

مثال :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})i$$

$$S_n = [(0 - \cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{3}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{n}} - \sqrt{n+1})]i$$

$$|S_n| = -\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$$

$\Leftarrow S_n \to \infty \Leftarrow S_n$ متباعدة $\Leftarrow$ المتسلسلة متباعدة

معيار الحد العام

$\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ متقاربة $\underbrace{\Leftarrow}_{\text{فإن}} 3_n \longrightarrow 0$

الأثبات :

لنفرض أن s مجموع المتتالية $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ المتقاربة

عندئذ : $S_n = S_{n-1} + 3_n$

$$S_n - S_{n-1} = 3_n$$

بأخذ نهاية الطرفين $0 = S - S = \lim 3_n$

◄**ملاحظة**

١- إذا كان $\mathfrak{Z}_n \nrightarrow 0$ فإن $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathfrak{Z}_n$ متباعدة

٢- العكس في المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة فقد توجد متسلسلة متباعدة حدها العام يسعى إلى الصفر

مثال

المتسلسلة $\{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})i\}$ متباعدة كما رأينا سابقاً

$$|\mathfrak{Z}_n| = |(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})i| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$(|i| = 1$, ما داخل الطويلة مقدار سالب فنقلب الإشارات)

$$\lim |\mathfrak{Z}_n| \quad (\infty, -\infty)$$

عدم تعين (لإزالته نضرب بالمرافق)

$$\lim|\mathfrak{Z}_n| = lim\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

المتسلسلة الهندسية العقدية

هي متسلسلة عقدية حدها العام متتالية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}(ba^n)$

a أساس المتسلسلة و b حدها الأول لدراسة تقاربها **نميز حالتين**

١- $|a| = 1$

$$|\mathfrak{Z}_n| = |ba^n| = |b||a^n| = |b| \longrightarrow |b| \neq 0$$

ومنه $\mathfrak{Z}_n \nrightarrow 0$ وهي متباعدة (حسب اختبار الحد العام)

٢- $|a| \neq 1$

$$S_n = b + ba + \cdots + ba^n + \cdots \quad ١$$
$$aS_n = ab + \cdots + ba^n + ba^{n+1} + \cdots \quad ٢$$

بطرح ٢ من ١

$$(1-a)S_n = b - ba^{n+1} \qquad : a \neq 1$$
$$\longrightarrow S_n = \frac{b}{1-a}(1-a^{n+1})$$

وهنا نميز حالتين :

أ- $|a| > 1$

$$a^{n+1} \longrightarrow \infty \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{و المتسلسلة متباعدة}} \quad S_n \longrightarrow \infty$$

ب - $|a| < 1$

$$a^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{و المتسلسلة متقاربة}} \quad S_n \longrightarrow \frac{b}{1-a}$$

المتسلسلة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} ba^n = \frac{b}{1-a}$

◄ملاحظة

قد لا تبدأ مجموع في المتسلسلة الهندسية من الصفر لأجل ذلك كنا نأخذ الدليل يبدأ في n_0

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما