



◀ دكتوراة الملاءة: هدى شحات

نظري

عنوان المحاضرة: الحركة المحصلة لنقطة مادية
(تركيب الحركات)

◀ المحاضرة: السابعة عشرة

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة ببحث جديد بعنوان الحركة المحصلة لنقطة مادية والآن لنبدأ ..

الحركة المحصلة لنقطة مادية (تركيب الحركات)

تعيين موضع وسرعة متجه في الجملتين المتحركة والثابتة :

لتكن (S) مجموعة متحركة (متماسكة) ولنعرف عليها جملة محاور متماسكة معها $(oxyz)$ ولتكن (S_1) مجموعة ثابتة ولنعرف عليها جملة محاور ثابتة $(ox_1y_1z_1)$ ، وليكن \vec{A} متجه ما متغير بالنسبة لـ S .

يتعين المتجه \vec{A} إذا عرفت مركباته على الجملة $(oxyz)$ المتماسكة بالشكل :

$$\vec{A}|_M = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

يتعين المتجه \vec{A} إذا عرفت مركباته على الجملة $(ox_1y_1z_1)$ الثابتة بالشكل :

$$\vec{A}|_F = A_{x_1} \vec{i}_1 + A_{y_1} \vec{j}_1 + A_{z_1} \vec{k}_1$$

حيث لدينا وبشكل عام :

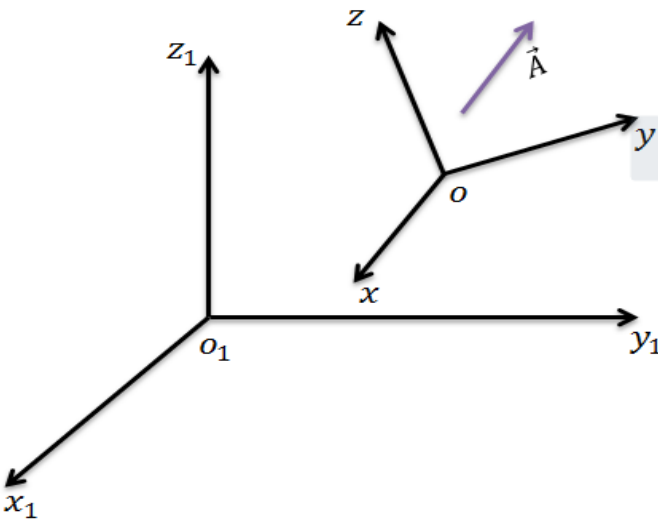
$$A_x \neq A_{x_1} , \quad A_y \neq A_{y_1} , \quad A_z \neq A_{z_1}$$

وإن متجهات الواحدة (i_1, j_1, k_1) ثابتة ،

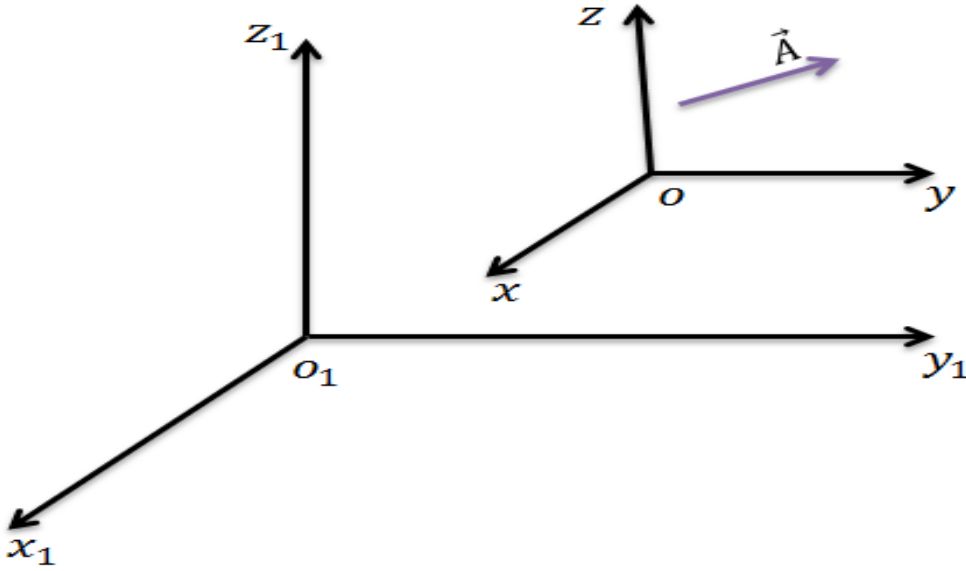
بينما متجهات الواحدة (i, j, k) متغيرة ،

ويمكن تعيين العلاقة بينهما إذا عرفنا حركة

(S) بالنسبة لـ (S_1) وسنميز الحالات التالية :



1- إذا تحركت الجملة المتماسكة (M) بالنسبة للجملة الثابتة (F) بحركة انسحابية :



نعلم إنه يمكن اختيار الجملة (xyz) موازية للجملة (ox₁y₁z₁) في الجملة الانسحابية وتحافظ هذه المحاور على مناحيها أثناء الحركة فيكون :

$$\vec{i} = \vec{i}_1, \vec{j} = \vec{j}_1, \vec{k} = \vec{k}_1$$

$$A_x = A_{x_1}, A_y = A_{y_1}, A_z = A_{z_1}$$

أي أن مركبات المتجه \vec{A} لا تتأثر بحركة الجملة المتماسكة S.

وإذا حسبنا مشتق المتجه \vec{A} بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة المتماسكة S نجد :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = A'_x \vec{i} + A'_y \vec{j} + A'_z \vec{k}$$

وإذا حسبنا مشتق المتجه \vec{A} بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة الثابتة S₁ نجد :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = A'_{x_1} \vec{i}_1 + A'_{y_1} \vec{j}_1 + A'_{z_1} \vec{k}_1$$

ولما كان :

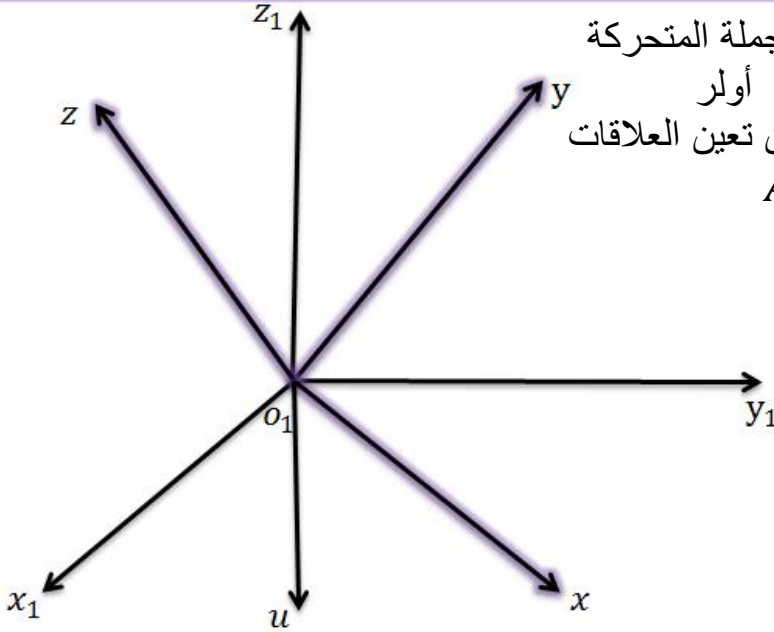
$$\vec{i} = \vec{i}_1, \vec{j} = \vec{j}_1, \vec{k} = \vec{k}_1$$

$$A_x = A_{x_1}, A_y = A_{y_1}, A_z = A_{z_1}$$

$$A'_x = A'_{x_1}, A'_y = A'_{y_1}, A'_z = A'_{z_1}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F$$

2- إذا تحركت الجملة المتماسكة M بالنسبة للجملة الثابتة F بحركة دورانية حول نقطة ثابتة :



إن متجهات الوحدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للجملة المتحركة تتعين في هذه الحالة بتابعية زوايا أولر كما مر معنا سابقاً ، وبالتالي يمكن تعيين العلاقات التي تربط المركبات A_x, A_y, A_z بالمركبات $A_{x_1}, A_{y_1}, A_{z_1}$

إن مشتق الشعاع \vec{A} بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة المتماسكة M هو :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M = A'_x \vec{i} + A'_y \vec{j} + A'_z \vec{k}$$

مشتق الشعاع \vec{A} بالنسبة لراصد متماسك مع الجملة الثابتة F هو :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = A'_{x_1} \vec{i}_1 + A'_{y_1} \vec{j}_1 + A'_{z_1} \vec{k}_1$$

أما اشتقاق العلاقة : $A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ بالنسبة للجملة الثابتة ، حيث لدينا $A_x, A_y, A_z, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متغيرة وبالتالي يصبح المشتق جداء ومنه :

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \underbrace{A'_x \vec{i} + A'_y \vec{j} + A'_z \vec{k}}_{\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M} + A_x \frac{d\vec{i}}{dt} + A_y \frac{d\vec{j}}{dt} + A_z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

ولأن الحركة دورانية فتصبح العلاقة بالشكل :

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + A_x (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + A_y (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + A_z (\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \wedge (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \dots (*)$$

ومن هذه العلاقة (*) يمكننا التحويل من الجملة المتماسكة إلى الجملة الثابتة (موضع وسرعة وتسارع)
ومنه نجد أن مشتق أي شعاع في الجملة المتحركة (المتماسكة) M بالنسبة للجملة الثابتة F يساوي
مشتق الشعاع بالنسبة للجملة المتحركة M مع الجداء الخارجي للشعاع بـ $\vec{\omega}$.

3- حركة الجملة المتماسكة (M) بالنسبة للجملة الثابتة (F) (حركة عامة) "انسحاب + دوران"

نعلم أنه في الحركة العامة لمجموعة متماسكة هي انسحاب مع القطب ودوران حول هذا القطب وبما
أن الحركة الانسحابية لا تؤثر على المتجهات ومشتقاتها فيمكن كتابة العلاقة (*) على الشكل التالي
وذلك باستخدام المؤثر التفاضلي بالنسبة لكمية شعاعية :

$$D|_F = D|_M + \vec{\omega} \wedge \dots$$

نطبق (*) على $\vec{\omega}$:

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_M + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}_0$$

متوازيان

تركيب الحركات لنقطة مادية

لتكن (M) نقطة مادية متحركة بالنسبة لمجموعة متماسكة S ، فإذا كانت المجموعة المتماسكة S
متحركة بدورها بالنسبة لمجموعة ثابتة S_1 فإننا نعرف الحركات التالية :
الحركة النسبية هي حركة النقطة المادية (M) بالنسبة للجملة المتحركة ونرمز لها بـ S .
الحركة الجرية هي حركة النقطة المادية (M) المتماسكة مع الجملة ($oxyz$) المتماسكة بالنسبة للجملة
الثابتة ($O_1x_1y_1z_1$)
الحركة المطلقة هي حركة النقطة المادية (M) المتماسكة مع الجملة ($oxyz$) المتماسكة بالنسبة للجملة
الثابتة ($O_1x_1y_1z_1$) وهي الحركة المحصلة للحركتين النسبية والجريّة .

مثال

راكب يتحرك على باخرة , عندها حركته بالنسبة لشيء ثابت في الباخرة هي حركة نسبية
إذا جلس الراكب ومرت الباخرة بجوار جزيرة ما فإن حركة الراكب مع الباخرة بالنسبة للجزيرة هي
حركة جرية أما حركة الراكب عندما يمشي في الباخرة هي حركة مطلقة بالنسبة لراصد في الجزيرة .

المسار والسرعة والتسارع النسبي :

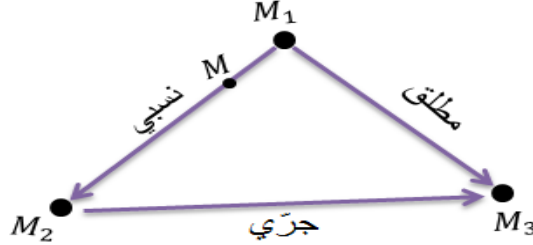
هو مسار النقطة المادية M في الحركة النسبية (M تتحرك من $M_1 \rightarrow M_2$) وسرعتها هي السرعة
النسبية $\vec{V}_r(M)$ وتسارعها هو التسارع النسبي $\vec{\Gamma}_r(M)$.

المسار والسرعة والتسارع الجري :

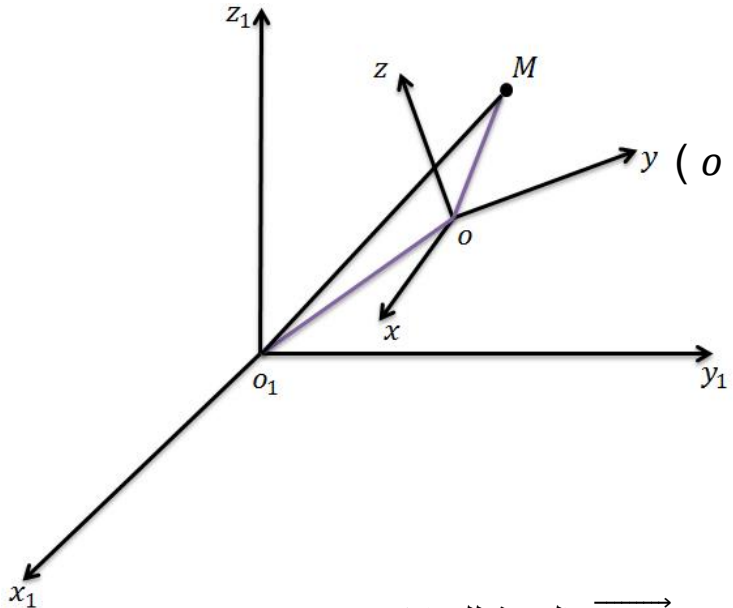
هو مسار النقطة المادية M في الحركة الجريّة (M تتحرك من $M_2 \rightarrow M_3$) وسرعتها هي السرعة
الجريّة $\vec{V}_e(M)$ وتسارعها هو التسارع الجري $\vec{\Gamma}_e(M)$.

المسار والسرعة والتسارع المطلق :

هو مسار النقطة المادية M في الحركة المطلقة (تتحرك من $M_1 \rightarrow M_3$) وسرعتها هي السرعة المطلقة $\vec{V}_a(M)$ وتسارعها هو التسارع المطلق $\vec{\Gamma}_a(M)$.



تعيين شعاع الموضع لنقطة المادية M



يعطى شعاع الموضع بالعلاقة : (بحيث $o_1 \in S_1$ و $o \in S$)

$$\vec{o_1M} = \vec{o_1o} + \vec{oM}$$

$$\Rightarrow \vec{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
 إن (x, y, z) تعين الحركة النسبية وأيضاً (x_0, y_0, z_0) تعين جزء من الحركة الجرية وكما أن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تعين زوايا أولر (ψ, φ, θ) التي تعين الجزء الثاني من الحركة الجرية .

تركيب السرعة لنقطة مادية M

لحساب السرعة المطلقة للنقطة M ، يكفي اشتقاق الموضع $\vec{o_1M}$ بالنسبة للفراغ S_1 .

$$\vec{V}_a(M) = \left. \frac{d\vec{o_1M}}{dt} \right|_F = \underbrace{\left. \frac{d\vec{o_1o}}{dt} \right|_F}_{\vec{V}(o)} + \left. \frac{d\vec{oM}}{dt} \right|_F$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{V}(o) + \left. \frac{d\vec{oM}}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \underbrace{\vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}}_{\vec{V}_e(M)}$$

حيث $\vec{\omega}$ هو شعاع الدوران في حركة S بالنسبة لـ S_1 .

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{V}_a(M)}_{\text{مطلقة}} = \underbrace{\vec{V}_r(M)}_{\text{نسبية}} + \underbrace{\vec{V}_e(M)}_{\text{جرية}}$$

وهذا يعني أن السرعة المطلقة هي المجموع الهندسي للسرعتين النسبية (وهي سرعة النقطة بالنسبة للجملة S) والجرية (وهي سرعة S بالنسبة للجملة S_1) .

عبارة التسارع

إن التسارع المطلق للنقطة M هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة للنقطة M بالنسبة للفراغ الثابت المتماكب مع S_1 ونرمز له $\vec{\Gamma}_a(M)$ ، إذا لتعيينه نشق العلاقة الشعاعية للسرعة المطلقة المعطاة بالشكل:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$$

وبالتالي نجد :

$$\vec{\Gamma}_a(M)|_F = \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_F + \frac{d\vec{V}(o)}{dt}\Big|_F + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{oM}}{dt}\Big|_F$$

حيث نعلم أن $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F$ وهو التسارع الزاوي ، و $\vec{\Gamma}(o) = \frac{d\vec{V}(o)}{dt}\Big|_F$

لدينا من علاقة التحويل من الجملة الثابتة إلى الجملة المتماكبة

$$\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_F = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \quad , \quad \frac{d\vec{oM}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{oM}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{oM}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{oM} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \underbrace{\vec{\Gamma}_r(M)}_{\text{تسارع مطلق}} + \underbrace{\vec{\Gamma}(o)}_{\text{التسارع النسبي}} + \underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{oM})}_{\text{التسارع الجري}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r}_{\text{التسارع المتمم}}$$

نطبق علاقة جيبس $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{oM}) = -\omega^2 \vec{oM}$

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} - \omega^2 \vec{oM} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

حيث نرمز للتسارع المتمم بـ $\vec{\Gamma}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$

ونعلم أن $\vec{\Gamma}_e(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} - \omega^2 \vec{oM}$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}_e(M) + \vec{\Gamma}_c(M)$$

سؤال: متى يكون التسارع المتمم معدوم؟؟

الجواب: إما $\vec{\omega} = \vec{0}$ الحركة الجرية هي حركة انسحابية فقط

أو $\vec{V}_r = \vec{0}$ التوازن النسبي للنقطة M بالنسبة للجملة المتماكبة S ، أو $\vec{\omega}_e \parallel \vec{V}_r$ عندما يصبح التسارع المتمم معدوم ، يصبح التسارع المطلق هو المجموع الهندسي للتسارع النسبي والجري .

الدراسة التحليلية للحركة المحصلة

دائماً في الدراسة التحليلية نبدأ باختيار جملتي محاور ثابتة ومتماكبة ، ولتكن $oxyz$ جملة محاور احداثية متماكبة مع S ، ولتكن $o_1x_1y_1z_1$ جملة محاور احداثية ثابتة ، عندئذ :
يعطى شعاع الموضع لنقطة ما ولتكن M من الجسم الصلب في الجملة الثابتة بالعلاقة :

$$\vec{o_1M} = \vec{o_1o} + \vec{oM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \dots \dots \$$$

$$\overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + y(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + z(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

$$M \text{ مركبات النقطة } \begin{cases} x_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 \\ y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 \\ z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 \end{cases}$$

حيث $\vec{i} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\vec{j} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\vec{k} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ زوايا أولر ، (x, y, z) هي الاحداثيات النسبية للنقطة M وهي مقادير تابعة للزمن ايضاً
 احداثيات النقطة 0 مبدأ الجملة المتحركة وهي ايضاً متغيرة بالنسبة للزمن ، وبالتالي
 تتعين احداثيات النقطة M المطلقة (x_1, y_1, z_1) بتابعية تسع وسطاء تابعة كلها للزمن .
 و (x_0, y_0, z_0) جزء في جرية و $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مع (x_0, y_0, z_0) جرية و (x', y', z') سرعة نسبية و
 (x'_1, y'_1, z'_1) سرعة مطلقة
 لتعين السرعة المطلقة نشق العلاقة \$ فنجد :

$$\vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k} + x \vec{i}' + y \vec{j}' + z \vec{k}' \dots (\$ \$)$$

علاقات بواصون $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$, $\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$, $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k} + x(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k} + \vec{\omega} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

حيث $\vec{V}_r(M) = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$ و $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$

$$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

لتعين التسارع نشق السرعة من العلاقة (\$\$) فنجد :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d^2\overrightarrow{o_1o}}{dt^2} + x'' \vec{i} + y'' \vec{j} + z'' \vec{k} + x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' + x \vec{i}'' + y \vec{j}'' + z \vec{k}''$$

$$+ x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \underbrace{x'' \vec{i} + y'' \vec{j} + z'' \vec{k}}_{\vec{\Gamma}_r(M)} + \underbrace{2[x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}']}_{\vec{\Gamma}_c(M)} + \underbrace{\vec{\Gamma}(o) + x \vec{i}'' + y \vec{j}'' + z \vec{k}''}_{\vec{\Gamma}_e(M)}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \vec{\Gamma}_r(M) + \vec{\Gamma}_e(M) + \vec{\Gamma}_c(M)$$

" دساتير بور "

في بعض المسائل يكون إيجاد شعاع التسارع المطلق في الجملة المتماسكة اسهل من ايجاده في الجملة الثابتة لذلك نحتاج لطريقة لإيجاد هذا الشعاع في الجملة المتماسكة وهذه الطريقة هي باستخدام دساتير بور ، نعلم أن التسارع المطلق هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة $\vec{V}_a(M)$ في الفراغ الثابت ، وبالتالي :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M)$$

حيث :

$$\vec{V}_a(V_x, V_y, V_z) , \quad \vec{\omega}(p, q, r) , \quad \vec{\Gamma}_a(M) = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

حيث

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{V}_a(M) = (qV_z - rV_y)\vec{i} + (rV_x - pV_z)\vec{j} + (pV_y - rV_x)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_a(M) = \begin{cases} \frac{dV_x}{dt} + qV_z - rV_y \\ \frac{dV_y}{dt} + rV_x - pV_z \\ \frac{dV_z}{dt} + pV_y - qV_x \end{cases}$$

وهذه الدساتير الثلاث هي دساتير بور التي تحدد التسارع المطلق على الجملة المتماسكة .

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون *** في حبسية
٢٠٢٠: ١٢/١٢/٢٠٢٠

من عمل ما ليس من طبعه
ولو كان صواباً، تعرض
لخطرین..... خطر
النفاق.... وخطر الإخفاق