2017/11/1 المحاضرة التاسعة

$X = \{0,1\}$

$\tau = \{\phi, X, \{0\}\}$

(X, τ)

* $f = \{X, \phi, \{1\}\}$

$\tau \cap f = \{\phi, X\}$

الفضاء (X,τ) مترابط

الفضاء (X,τ) متراص لأن أي تغطية منه ستكون X

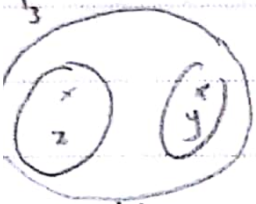
" ، ليس فضاء T_1 لأن $\{0\}$ ليست مغلقة

مبرهنات هامة في الفضاء المتري:

(X,d) فضاء متري

T_1: كل مجموعة وحيدة العنصر تكون مغلقة

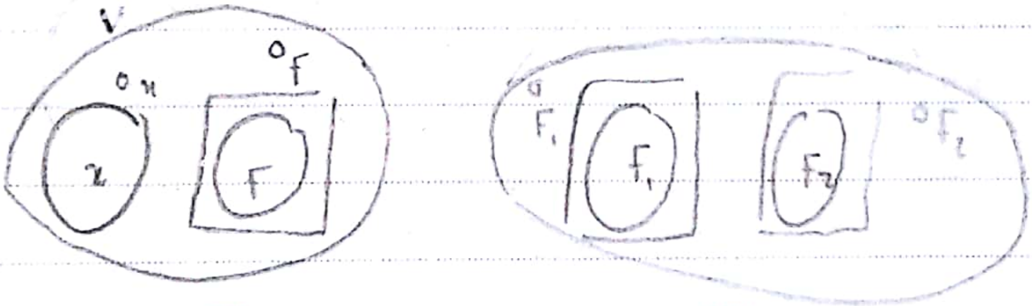
T_3



T_2: $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists\, O_x \;\exists\, O_y \quad O_x \cap O_y = \phi$

T_3: $\forall x \;\; \forall F$ المغلقة $x \notin F \Rightarrow \exists\, O_x \;\exists\, O_F \quad O_x \cap O_F = \phi$

T_4:



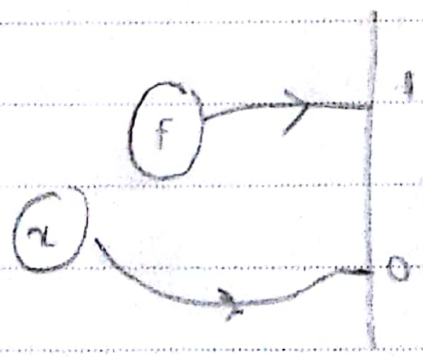
T_3 T_4

T_4: $\forall F_1, F_2$ مغلقتان ومنفصلتان $\exists\, O_{F_1}, O_{F_2} : O_{F_1} \cap O_{F_2} = \phi$

$T_{3\frac{1}{2}}$: $\forall x \quad \forall F \not\ni x \quad \exists f : X \to \mathbb{R}$ مستمر $\quad 0 \leq f(x) \leq 1$

$f(x) = 0$

$f(F) = \{1\}$



$\forall x, y \in X \; ; \; x \neq y \quad \exists O_x \ni x \; , \; O_x \not\ni y$: T_0

$\exists O_y \ni y \; ; \; O_y \not\ni x$ or

$\forall x, y \in X \; ; \; x \neq y \quad \exists O_x \ni x \; , \; O_x \not\ni y$: T_1

$\exists O_y \ni y \; , \; O_y \not\ni x$ and

$*\quad \left.\begin{array}{l} f \longrightarrow x \\ f \longrightarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = y$ ومنه، لرشحة وحيدة إن وجدت

الفضاء المفصول: توجد مجموعة A قابلة للعد وكثيفة أي لصاقتها تساويها.

$(\mathbb{R} \; , \; \mathcal{T}_{]a,b[})$

$\overline{Q} = \mathbb{R}$

أوجد متتالية من عناصر Q تسعى إلى $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = 1,414\,213$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1,4$

$x_2 = 1,41$

$x_3 = 1,414$

من التحليل العددي: $x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right) \longrightarrow \sqrt{\alpha}$

حل تمارين من دروس سابقة:

1] مثال 2: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية

1- برهن أن τ طبولوجيا على R

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{cf} = \{ A \subseteq R \; : \; A = \phi \;$ or $\; A^c$ منتهية $\}$

$* \quad \exists \; \mathbb{R}^c = \phi \xRightarrow{\phi\text{ منتهية}} R \; \tau$

$A_1 , A_2 \in \tau \quad , \quad A_1 \cap A_2 \overset{?}{\in} \tau$

Scanned by CamScanner

لدينا

$* \ (A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_1^c$

إذ A_1^c , A_2^c كل منهما منتهية وبالتالي فإن

$* \ \forall \underset{i \in I}{A_i} \in \tau \Rightarrow A_i^c$ منتهية

$A = \underset{i \in I}{\cup} A_i$

$A^c = \cap A_i^c$ منتهية

إذا ~~$A \in$~~ $A \in \tau$

الطلب الثاني:

إذا كانت $\theta_1 \neq \phi$ و $\theta_2 \neq \phi$ وكلاهما من τ فإن $\theta_1 \cap \theta_2$ مجموعة غير (غير منتهية) منتهية وبالتالي غير خالية.

لنفرض جدلاً أن $\theta_1 \cap \theta_2 = \phi$ عندئذ $\theta_1 \subseteq \theta_2^c$ إذاً θ_1 منتهية وهذا خطأ لأن θ_1 مفتوحة وغير خالية فرضاً في حين أن منتهية غير منتهية

تمرين إضافي: $A =]-10, 10[$ $-10, \infty$ هل هي مفتوحة في هذا الفضاء؟

غير مفتوحة . غير مغلقة

$* \ x \neq y$

$O_x \cap O_y \neq \phi$

الطلب الثالث:

إنه غير متور لو فرضنا إنه متور وكانت $x \neq y$

$\exists \, O_x \quad \exists \, O_y \quad O_x \cap O_y = \phi$

$O_x = N(x, \frac{\varepsilon}{2}) \qquad \Leftarrow d(x,y)$

$O_y = N(y, \frac{\varepsilon}{2})$

ولكن حسب الطلب السابق لا يمكننا ذلك.

الطلب الرابع

المحاضرة العاشرة   أح 2017/11/15

تحدث فيها عن الشبكات ولكن الشبكات محذوفة.

المحاضرة الحادية عشر   أر 2017/11/8

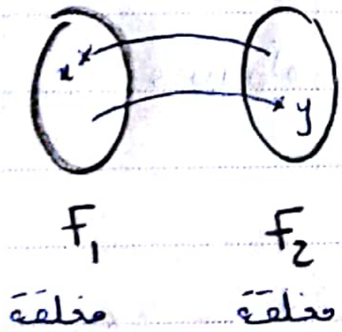
لو فرضنا جدلاً أن $O_x \cap O_F \neq \phi$ عندها:

$$\begin{cases} \exists\, z \in O_x = N(x, \frac{\varepsilon}{3}) \\ \exists\, y \in F \quad ; \quad z \in N(y, \frac{\varepsilon}{3}) \end{cases}$$

$$\varepsilon = d(x,F) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

وهذا غير ممكن ومنه الفرض الجدلي خاطئ.

- أثبت أنه لأجل (X,d) فضاء متري فإن (X,d) هو فضاء T_4.



$$N(x, \frac{\varepsilon(x)}{10}) \quad , \quad N(y, \frac{\varepsilon(y)}{10})$$

$$0 < \varepsilon(x) = d(x, F_2) \quad ; \quad \varepsilon(y) = d(y, F_1)$$

$$O_1 = \bigcup_{x \in F_1} N(x, \frac{\varepsilon(x)}{10}) \quad , \quad O_2 = \bigcup_{y \in F_1} (y, \frac{\varepsilon(y)}{10})$$

لنفرض جدلاً أن $O_1 \cap O_2$ غير خالية عندئذ:

$$\exists\, z \quad ; \quad z \in O_1 \quad , \quad z \in O_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, x \in F_1 \quad ; \quad z \in N(x, \frac{\varepsilon(x)}{10}) \\ \exists\, y \in F_2 \quad ; \quad z \in N(y, \frac{\varepsilon(y)}{10}) \end{cases}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$\leq \frac{\varepsilon(x)}{10} + \frac{\varepsilon(y)}{10}$$

إمّا أن $\varepsilon(y) \leq \varepsilon(x)$ أو $\varepsilon(x) \leq \varepsilon(y)$ ومناقشة إحدى الحالتين كافية

بفرض $\varepsilon(x) \geq \varepsilon(y)$ فإن:

$$d(x,y) \leq \frac{2\varepsilon(x)}{10} = \frac{\varepsilon(x)}{5}$$
$$d(x,F_2) \leq d(x,y) \leq \frac{\varepsilon(x)}{5}$$
$$\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon(x)}{5}$$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ.

* برهان آخر لـ T_4 (باستخدام طريقة إثبات $T_{3\frac{1}{2}}$)

$$f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$$

$$x \in F_1 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x \in F_2 \Rightarrow f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+0} = 1$$

$$F_1 \subseteq \{x : f(x) < \tfrac{1}{2}\} = \theta_{F_1}$$
$$F_2 \subseteq \{x : f(x) > \tfrac{1}{2}\} = \theta_{F_2}$$
$$\theta_{F_1} = f^{-1}(]-\infty, \tfrac{1}{2}[)$$
$$\theta_{F_2} = f^{-1}(]\tfrac{1}{2}, \infty[)$$

ومن الواضح أن $\theta_{F_1} \cap \theta_{F_2} = \phi$.

* التراص ومسلمات الفصل *

* تعريف: ليكن (X,τ) فضاء توبولوجياً نقول عن $K \subseteq X$ إنها متراصة $\Leftrightarrow$

if $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} \theta_\alpha$ then $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in L;\ K \subseteq \theta_{\alpha_1} \cup \theta_{\alpha_2} \ldots \cup \theta_{\alpha_n}$

ملاحظة: $F \subseteq K \Leftarrow F$ متراصة. (متراصة مغلقة)

والعكس ليس صحيحاً بالضرورة ويتحقق العكس في حال X فضاء متري وفي حال X فضاء T_2.

* الصورة المستمرة لمتراصة هي متراصة:

$f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ مستمرة

$\Rightarrow \underset{\text{متراصة}}{K} \subseteq X \Rightarrow \underset{\text{متراصة}}{K_1 = f(K)}$

والعكس ليس صحيحاً بالضرورة.

تمرين: ليكن $(\mathbb{R}, \tau_{]a,b[})$ هل هو متراص؟

ليس متراص (ولكن فيه كل مغلقة ومحدودة متراصة)

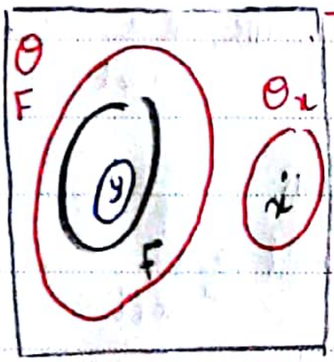
مثال: $[-1,1]$ متراصة فيه (مغلقة ومحدودة)

$\mathbb{Z}$ غير متراصة فيه (لأنها غير محدودة)

نعود لسبب عدم التراص $R=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcup\limits_{\alpha\in L}^{\infty}]-n,n[$

إن الجماعة O_n حيث $(n\geq 1)$ هي تغطية مفتوحة لـ R ولكن أي جماعة جزئية منتهية منها لن تكون تغطية لـ R

- أثبت أن $]-1,1[$ ليس متراصاً في هذا الفضاء.



T_2 فضاء متراص

* مبرهنة: إذا كان (X,τ) فضاء متراص و T_2 فهو فضاء T_3

حسب T_2:
$$x\neq y \quad \exists U_{x(y)} \cdot \exists V_y$$
$$U_{x(y)}\cap V_y=\phi$$

$$F\subseteq \bigcup_{y\in F} V_y$$

F مغلقة في فضاء متراص فهي متراصة وبالتالي:

$\exists y_1, y_2, \dots, y_n\in F$ بحيث

$$F\subseteq V_{y_1}\cup V_{y_2}\cup\dots\cup V_{y_n}=V$$

تقاطعهما خالي

$$U_{(x,y_1)}\cap U_{(x,y_2)}\cap\dots\cap U_{(x,y_n)}=U$$

التقاطع المنته لمفتوحات مفتوحة ونلاحظ أن:

$$V\cap U=\phi$$

ومنه الفضاء هو فضاء T_3

مبرهنة: إذا كان $(X, ح)$ فضاء متراص و T_2 فهو فضاء T_4 (وظيفة)