نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثالثة عشر   عنوان المحاضرة : المتتاليات والمتسلسلات العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـخواص المتتالية

٢ـالمتتالية الهندسية العقدية

٣ـنقطة تجمع المتتالية

٤ـالمتتالية الكوشية

تنويه : ذكرنا في المحاضرات السابقة تعريف فصل مجموعة والأن سنضيف معلومة :

$$A_1, A_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow A = (A_1 | A_2)$$

$$A_1 \cup A_2 = A \quad , \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

A_1, A_2 مفتوحتان معاً في A أو (مغلقتان في A)

*كما تطرقنا في المحاضرة السابقة إلى المتتاليات العقدية وذكرنا أن المتتالية $\{i^n\}$ متأرجحة (هي متتالية حدودها تتأرجح بين أكثر من قيمة) متباعدة

خواص المتتالية

ملاحظة : المتناوبة حالة خاصة من المتأرجحة لكن المتناوبة متأرجحة بين قيمتين سالبة وموجبة

١ $3_n \longrightarrow a \Leftrightarrow |3_n - a| \longrightarrow 0$

(وضوحاً من التعريف) وكحالة خاصة $3_n \longrightarrow 0 \Leftrightarrow |3_n| \longrightarrow 0$

٢ $3_n \longrightarrow a \Rightarrow |3_n| \longrightarrow |a|$ العكس غير صحيح

مثال: $\{3_n = i^n\}$ متباعدة إلا أن

$$|\mathfrak{z}_n| = |i^n| \mapsto 1$$

٣ نهاية متتالية عقدية متقاربة وحيد لنفرض جدلاً للمتتالية المتقاربة $\{\mathfrak{z}_n\}$ نهايتين مختلفتين a', a

$$0 < |a - a'| = \left||\mathfrak{z}_n - a'| + |a - \mathfrak{z}_n|\right| \leq (|\mathfrak{z}_n - a'| + |\mathfrak{z}_n - a|) \mapsto 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة $a = a' \Leftarrow |a - a'| = 0$

و هذا تناقض بالتالي الفرض الجدلي خاطئ

النهاية وحيدة $\Leftarrow$

ملاحظة :

$a_n < b_n$

$\lim a_n \leq \lim b_n$

مبرهنة

$$a \text{ متقاربة من } \mathfrak{z}_n = x_n + i\, y_n \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_n \longmapsto Re a \\ y_n \longmapsto Im a \end{Bmatrix}$$

البرهان

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن $\{\mathfrak{z}_n\}$متقاربة من a و هذا يحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 ; \forall n > N ; |\mathfrak{z}_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\underbrace{x_n}_{\overset{\|}{Re \mathfrak{z}_n}} - Re\, a\right| = |Re(\mathfrak{z}_n - a)| \leq |\mathfrak{z}_n - a| < \varepsilon$$

$$\longrightarrow x_n \to Rea$$

ثم أن :

$$|y_n - Im\, a| = |Im(\mathfrak{z}_n - a)| \leq |\mathfrak{z}_n - a| < \varepsilon$$

$$\longrightarrow y_n \to Im\, a$$

$(\Rightarrow)$ لنفرض أن $y_n \to Im\, a\,, x_n \to Re\, a$ عندئذ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} \underbrace{\exists N_1 > 0}_{x_n \to Re\, a} \ ; \ \forall n > N_1 \Longrightarrow |x_n - Re\, a| < \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots (1) \\ \underbrace{\exists N_2 > 0}_{y_n \to Im\, a} \ ; \ \forall n > N_2 \Longrightarrow |y_n - Im\, a| < \frac{\varepsilon}{2} \ldots (2) \end{cases}$$

من (1) و (2)

$$\Longrightarrow \exists N = \max(N_1, N_2)$$

$|i|=1$

$$\forall n > N \ ; |z_n - a| = |(x_n - Re\, a) + i(y_n - Im\, a)|$$

$$\leq |x_n - Re\, a| + |y_n - Im\, a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(لماذا اخذنا max ؟ اننا اخترنا max لأن كل منهما أكبر تماماً من $\frac{\varepsilon}{2}$)

$$\Longrightarrow z_n \longrightarrow a$$

ملاحظة : نستفيد من هذه المبرهنة إلى تحول دراسة النهاية لعدد عقدي إلى نهاية العدد الحقيقي

مثال :

١ $\left\{z_n = (-1)^n + i\frac{1}{n}\right\}$

متباعدة لأن متتالية الأجزاء الحقيقية لها وحيد $\{(-1)^n\}$ متتالية متباعدة

ملاحظة : إذا كان إحدى الأجزاء المتتالية متباعدة فلا داعي لنظر للمتتالية الأخرى

٢ $\left\{z_n = \frac{n}{2n+1} + i\frac{\sin n}{n}\right\}$

متتالية متقاربة إلى $\frac{1}{2} + i$

المتتالية $\frac{1}{n}\sin n$ تسعى إلى الصفر لأن

$\frac{1}{n}$: تسعى للصفر

$\sin n$: محدودة

$$x_n = \frac{n}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$y_n = \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n}\sin n \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow 3_n = \frac{1}{2} + i\,0 = \frac{1}{2}$$

٣) $\left\{\frac{e^{in}}{n}\right\}$

الطريقة الأولى : حسب الخاصة (٢)

$$\left|\frac{e^{in}}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

الطريقة الثانية :

$$\frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n + i \sin n}{n} = \frac{\cos n}{n} + i\,\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$$

مبرهنة:

كل متتالية متقاربة تكون محدودة (البرهان وظيفة)

*والعكس غير صحيح ومثال على ذلك

$\{i^n\}$ محدودة لأن $|i^n| = 1 < 2 \quad \forall n$ ولنأخذ القرص $D(0\,,\frac{3}{2})$

$\Longleftarrow$ محدودة ولكنها متباعدة لأنها تتأرجح بين أربع قيم

(لأن جعل جميع حدودها محتواه في القرص $D(0\,,\frac{3}{2})$ وهي متباعدة لأنها تتأرجح بين أربع قيم
$\{1, -1, i, -i\}$)

المتتالية الهندسية العقدية

هي متتالية حدها العام يأخذ الشكل التالي :

$$3_n = ba^n$$

حيث : a : أساس المتتالية العقدية

b : الحد الأول للمتتالية الهندسية

a, b ثابتان عقديان

نميز حالتين :

$\boxed{١}$ $|a| = 1$ (تعني النقاط التي تقع على الدائرة الواحدة)

$$|3_n| = |ba^n| = |b||a^n| = |b|$$

$$\Longrightarrow b \neq 0$$

لنفرض جدلاً أن 3_n متقاربة ونهايتها L

$$3_n + 1 = ba^{n+1} = baa^n = a3_n$$

لنأخذ نهاية الطرفين $L = aL$ أيضاً نميز حالتين :

١- $a \neq 1$ المساواة السابقة تقتضي تناقض إلا في حالة $L = 0$
لكن L لا يمكن أن تساوي الصفر لأن :

$$|3_n| = |b| \longrightarrow |b| \neq 0$$

$$\Longrightarrow |3_n| \nrightarrow 0$$

وبسبب الفرض الجدلي حصلنا على تناقض
$\Leftarrow$ $\{3_n\}$ في هذه الحالة غير متقاربة

٢- $a = 1$ فإن

$$3_n = b(1)^n = b \longrightarrow b$$

$\{3_n\}$ متقاربة ونهايتها b

$\boxed{٢}$ $|a| \neq 1$ (وهذه يعني أما $a > 1$ أو $a < 1$)

تذكرة :

$* \lim a^n = 0$
$; |a| < 1$
$* \lim a^n$
$= +\infty$
$; |a| > 1$

١- $|a| < 1$

$$|3_n| = |b| \underbrace{|a|^n}_{\text{إذا كان هذا الثابت يسعى إلى الصفر (متتالية حقيقية)}} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow 3_n \longrightarrow 0$$

٢- $|a| > 1$

$$|3_n| = |b| \underbrace{|a|^n}_{\text{لأن عدد حقيقي موجب الأوس } n \text{ حسب تعريف نهاية متتالية تسعى إلى } \infty} \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow 3_n \longrightarrow +\infty$$

$\{3_n\}$ متباعدة

◄تلخيص لما سبق

١- إذا كان أساس المتتالية الهندسية بالطويلة أصغر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الصفر

٢- إذا كان طويلة أساس المتتالية الهندسية أكبر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متباعدة وتسعى إلى ∞

٣- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس أيضاً يساوي الواحد فالمتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الحد الأول (b)

٤- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس لا يساوي الواحد فإن المتتالية تكون متباعدة

أمثلة :

- $\{i^n\}$ متتالية هندسية إساسها i , $|i| = 1$ كما أن $i \neq 1$
  $\Leftarrow$ متباعدة
- $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1$$

طويلة الأساس أصغر من الواحد $\Leftarrow$ متقاربة نهايتها تساوي الصفر

- $\{(1+i)^n\}$ متتالية هندسية أساسها $|1+i| = \sqrt{2} > 1$
  طويلة الأساس أكبر من الواحد $\Leftarrow$ متباعدة ونهايتها ∞

نقطة تجمع المتتالية

نقول عن a أنها نقطة تجمع متتالية عقدية $\{3_n\}$ إذا حوت أي جوار لـ a عدداً غير منتهي من حدود المتتالية 3_n

مثال :

إن نقاط تجمع المتتالية $\{i^n\}$ هي $\{-i\ ,-1\ ,i\ ,1\}$

لأن أي جوار لأي منها هذه القيم سيحوي عدداً غير منتهي من الحدود المتتالية على الأقل وهو سيحوي الحدود المساوي لتلك القيمة وعددها غير منتهي

ملاحظة : نقطة التجمع متتالية ليس من الضروري أن تكون نقطة تجمع لمجموعة قيمها إلا أن نقطة التجمع مجموعة قيم المتتالية هي نقطة تجمع متتالية

مثال : $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$ غير منتهية ومجموعة قيمها

$$\left\{i\,,\frac{-1}{2},\frac{-i}{3},\frac{1}{4},\frac{i}{5},\frac{-1}{6},\frac{-i}{7},\frac{1}{8},\dots\dots\right\}$$

لهذه المجموعة نقطة تجمع وحيدة هي الصفر

$$\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{i^n}{n} \longrightarrow 0$$

$\Longleftarrow$ هندسياً يعني أي جوار للصفر سيحوي كل حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها أي سيحوي عدد غير منتهي من حدود المتتالية أي عدد غير منتهي من قيم المجموعة (0 نقطة تجمع)

مبرهنة:

للمتتالية المتقاربة نقطة تجمع وحيدة وهي نهايتها

المتتالية الكوشية :

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها كوشية إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists N > 0\,;\ \forall\, n, m > N\,;\ |z_m - z_n| < \varepsilon$$

مبرهنة وظيفة : كل متقاربة كوشية في أي فضاء متري

مبرهنة

$\{z_n\}$ كوشية في $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

أثبت أن $\mathbb{C}$ فضاء تام

z_n كوشية $\mathbb{C}$ يؤيد أن x_n , y_n كوشيتان في $\mathbb{R}$ تام تؤدي إلى أن x_n , y_n متقاربتان في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة z_n متقاربة في $\mathbb{C}$

إذاً $\mathbb{C}$ فضاء تام

مبرهنة

كل متتالية كوشية متقاربة والعكس غير صحيح بالضرورة

الأثبات :

نفرض 3_n متقاربة فإن متتالية الأجزاء الحقيقية وتخيلية متقاربة (كل متتالية كوشية متقاربة في $\mathbb{R}$

وهذا يؤدي إلى أنهما كوشيتان في R وحسب مبرهنه ($|3_n|$ كوشية فإن هذا يكافئ $|x_n|$, $|y_n|$ كوشيتان يؤدي إلى أن 3_n كوشية

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما