◄الدكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة : الثامن عشرة عنوان المحاضرة: حل تمارين

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

حل أمثلة.

مثال 1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x$$

الحل

نأخذ المعادلة بدون طرف ثانٍ:

$$y'' - 5y' = 0$$

فإن المعادلة المميزة لها هي: $\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \ , \quad \lambda_2 = 5$$

فيكون **الحل العام** للمعادلة التفاضلية بدون طرف ثانٍ هو:

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 x} + c_2 . e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 + c_2 . e^{5x}$$

الحل الخاص:

نلاحظ أنَّ: $\alpha = 0$ هي جذر للمعادلة المميزة فيكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = x[Ax^2 + Bx + c]$$

$$y_P = Ax^3 + Bx^2 + cx$$

نشتق مرتين:

$$y'_P = 3Ax^2 + 2Bx + c \text{ و } y''_P = 6Ax + 2B$$

Syria Math Team

وبعد الاشتقاق نعوض بالمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ ونطابق أمثال الx^2 وأمثال الx والثوابت:

$$(6Ax + 2B) - 5(3Ax^2 + 2Bx + c) = -5x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad , B = C = 0$$

ويكون الحل الخاص هو: $y_P = \frac{1}{3}x^3$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ هو:

$$Y = y + y_P = c_1 + c_2 . e^{5x} + \frac{1}{3}x^3$$

مثال2: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2$$

الحل

بما أنَّ الطرف الثاني كثير حدود نفرق المعادلتين لتسهيل الحل:

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x \ldots (1)$$

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 \ldots (2)$$

والآن نأخذ المعادلة التفاضلية بدون طرف ثانٍ:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

فتكون المعادلة المميزة لها من الشكل:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = 5$$

يكون الحل العام للمعادلتين (1) و (2)بدون طرف ثانٍ من الشكل:

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 x} + c_2 . e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y = c_1 . e^x + c_2 . e^{5x}$$

Syria Math Team

الحل الخاص:

-الحل الخاص للمعادلة (1):

نلاحظ أنَّ $\alpha = 1$ هي جذر للمعادلة المميزة ويكون الحل الخاص لها من الشكل:

$$y_{P_1} = Axe^x$$

$$y'_{P_1} = Ae^x \text{ و } y''_{P_1} = e^x$$

نعوض بالمعادلة (1)ونلاحظ أنَّ $A = \frac{3}{4}$ ومنه يكون الحل الخاص لها:

$$y_{P_1} = \frac{3}{4}xe^x$$

-الحل الخاص للمعادلة (2) :

نلاحظ أنَّ $\alpha = 0$ ليست جذر للمعادلة المميزة ويكون الحل الخاص لها من الشكل:

$$y_{P_2} = Ax^2 + Bx + c$$

$$y'_{P_2} = 2Ax + B \ , \quad y''_{P_2} = 2A$$

وبعد الاشتقاق والتعويض بالمعادلة الأصلية (2) نلاحظ أنَّ:

$$2A - 12Ax - 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2$$

$$\Rightarrow A = 1 \ , \quad B = \frac{12}{5} \ , \quad C = \frac{62}{25}$$

ومنه الحل الخاص لها: $y_{P_2} = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ هو:

$$Y = y + y_{P_1} + y_{P_2} \Rightarrow Y = c_1e^x + c_2e^{5x} + \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$$

Syria Math Team

مثال 3 : أوجد الحل لعام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y' - 2y = e^x \underbrace{[\cos x - 7\sin x]}_{\text{تابع جيبي}}$$

الحل

نأخذ المعادلة بدون طرف ثانٍ:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

فإنّ المعادلة المميزة لها هي:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \, , \lambda_2 = 2$$

فيكون الحل العام بدون طرف ثانٍ من الشكل:

$$y = c_1 . e^x + c_2 . e^{2x}$$

الحل الخاص:

نلاحظ أنَّ $(a + bi) = 1 + i$ هي ليست جذر للمعادلة المميزة ويكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = e^x [A \cos x - B \sin x]$$

نشتق مرتين ثم نعوض بالمعادلة الأصلية:

$$y'_P = e^x [-A \sin x - B \cos x] \, , \qquad y''_P = e^x [-A \cos x + B \sin x \,]$$

نعوض بالمعادلة الأصلية ثم نطابق لتعيين الأمثال A, B :

$$e^x(-A \cos x + B \sin x \,) + e^x(-A \sin x - B \cos x) - 2e^x(A \cos x - B \sin x) = e^x(\cos x - 7 \sin x)$$

$$A=2 \quad , \quad B=1$$

ويكون الحل الخاص بعد تعويض الأمثال:

$$y_P = e^x(2 \cos x - \sin x)$$

وعليه يكون الحل العام مع طرف ثانٍ من الشكل:

$$Y = y + y_P = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x(2 \cos x - \sin x)$$

Syria Math Team

مثال 4 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = 2\sin x$$

الحل

نأخذ المعادلة بدون طرف ثانٍ:

$$y'' + y = 0$$

المعادلة المميزة:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp i$$

ويكون الحل العام بدون طرف ثانٍ من الشكل:

$$y = c_1.\cos x + c_2.\sin x$$

الحل الخاص:

نلاحظ أنَّ $(a + bi) = 0 + i$ هي جذر للمعادلة المميزة ويكون الحل الخاص من الشكل:

$$y_P = x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y'_P = -A\sin x + B\cos x \text{ و } y''_P = -A\cos x - B\sin x$$

نعوض بالمعادلة الأصلية ثم نطابق الأمثال:

$$(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) = 2\sin x$$

$$\Rightarrow A = -1\,, B = 0$$

ومنه يكون الحل الخاص: $y_P = x(-\cos x)$

الحل العام مع طرف ثانٍ:

$$Y = y + y_P = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحُلَيبي وهرهف النقشي

Syria Math Team

Syria Math Team