المحاضرة العاشرة

الاربعاء ١٩ صفر ١٤٣٩هـ
٨ التشرين ٢٠١٧م

تمرين (٣٣) اذا كان A جبر لي بسيط على حقل ما اثبت ان $Cen\, A = \{0\}$

$Cen\ A$ مثالي في A

~~A~~ ومع ان A جبر بسيط فلدينا حالتين:

تذكرة:
A جبر لي بسيط اذا كان تبادلي ولا يحوي اي مثالي حقيقي.

$Cen\, A = 0$ يتم المطلوب.

$Cen\, A = A$ نعلم ان

$$[A, Cen\, A] = \{0\}$$

$$[Cen\, A, Cen\, A] = \{0\} \qquad \because A = Cen\, A$$

$$\Rightarrow [A, A] = [Cen\, A, Cen\, A] = \{0\}$$

وهذا يعني ان A جبر تبادلي وهذا يناقض كون A جبر بسيط ومنه $Cen\, A = \{0\}$

تمرين (٣٤) ليكن A جبر لي اثبت صحة ما يلي

A قابل للحل $\Leftrightarrow$ $I_{nn}(A)$ جبر جزئي قابل للحل في $GL(A)$

$\boxed{\Leftarrow}$ ليكن A قابل للحل ولناخذ التمثيل المرافق لجبر لي A

$$ad : A \rightarrow GL(A)$$

نعلم ان الصورة المباشرة لجبر لي قابل للحل وفق اي تشاكل يكون قابل للحل وبالتالي $Im(ad)$ هو جبر جزئي

قابل للحل $\Leftarrow$ I_{nn} هو جبر جزئي قابل للحل في $GL(A)$

$\boxed{\Rightarrow}$ نعلم ان $Ker\,(ad) = Cen(A)$ وهو مثالي في A

ومنه حسب مبرهنة التماثل $A/\ker(ad) \cong Im(ad)$

$\Rightarrow A/Cen\,A \cong I_{nn}(A)$

استنادا للفرض $A/Cen A$ قابل للحل و $Cen A$ تبادلي فهو قابل للحل
"لأنه تبادلي وكل تبادلي قابل للحل" ودليله (1) .
عندئذ حسب مبرهنة سابقة إن A قابل للحل

السلسلة المركزية المتزايدة :
ليكن A جبر لي عندئذ

$A_{[0]} = \{0\}$

$A_{[1]} = \{x_2 \in A \quad [x_1, x_2] = 0 \quad \forall x_1 \in A\} = Cen A$

$A_{[2]} = \{x_3 \in A \quad [x_1, [x_2, x_3]] = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A\}$

$A_{[3]} = \{x_4 \in A \quad [x_1[x_2[x_3, x_4]]] = 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in A\}$

$\vdots$

$A_{[n]} = \{x_{n+1} \in A \quad [x_1, [x_2, [\cdots [x_n, x_{n+1}]]]] = 0 \quad \forall x_i \in A \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

اثبت أن $A_{[2]}$ مثالي جزئي من A

$$[x_1, [y_1, z_1 + z_2]] = [x_1, [y_1, z_1]] + [x_1, [y_1, z_2]] = 0$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 \in A_{[2]}$$

$\forall \alpha \in k \qquad z \in A_{[2]}$

$$[x, [y, \alpha z]] = \alpha [x, [y, z]] = \alpha . 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in A_{[2]} \Rightarrow$$ $A_{[2]}$ مثالي جزئي

يمكن تعميم هذه القضية من أجل بقية المجموعات

/ /

نظرية (٢٥) A مبرهنة عندئذ $A_{[n]}$ مثالي جزئي A

* لنبرهن اولاً ان $A_{[n]}$ مغلق جزئي في A اي

$\alpha, \beta \in R \qquad x_{n+1}, y_{n+1} \in A_{[n]}$

$\Rightarrow \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \in A_{[n]}$

$L_1 = [x_1, [x_2, [\dots, [x_n, \alpha x_{n+1} + \beta x_{n+1}] \dots]]] = 0$

$\forall\, x_1, x_2 \dots x_n \in A$

استناداً لتعميم الفكرة السابقة

$L_1 = \alpha[x_1, [x_2, [\dots [x_n, x_{n+1}] \dots]]] + \beta[x_1, [\dots [x_{n+1}, y_{n+1}] \dots]] = 0$

$\Rightarrow \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \in A_{[n]}$

* والآن نبرهن ان $A_{[n]}$ مستقر بالنسبة لتطبيقات الاشتقاق على A اي $d(A_{[n]}) \subseteq A_{[n]} \qquad \forall d \in \operatorname{Der} A$

$\forall z \in A_{[n]} \qquad d(z) \in A_{[n]}$

$[x_1, [\dots [x_n, dz] \dots]] = [dx_1, [\dots [x_n, dz] \dots]] + \dots +$
$[x_1, [\dots [dx_n, z]] + [x_1, [\dots [x_n, dz]] = 0$

تذكرة:

$d[x, y] = [dx, y] + [x, dy]$

$d[x, [y, z]] = [dx, [y, z]] +$
$[x, [dy, z]] + [x, [y, dz]]$

يمكن تعميم ذلك

ان $z \in A_{[n]}$

تركيبها مع n عنصر من اليسار

وصورتها صفر وبتطبيق d

اشتقاق ينقل الصفر الى صفر

ان الطرف الايسر معدوم

اما الطرف الايمن فهناك n حد من حدوده الاولى معدومة

وبذلك يتضح $dz \in A_{[n]}$

Galaxy

٥٧

/ /

ملاحظة: يتضح وفق ما ورد انه لدينا سلسلة من المثاليات المميزة في جبر لي

مبرهنة (٣١) ليكن A جبر لي عندئذ $A_{[n-1]}$ يكون مثاليا في $A_{[n]}$ $\forall n \geq 1$

* لنبرهن ان $[A_{[n-1]}, A_{[n]}] \subseteq A_{[n-1]}$

اي $A_{[n-1]} \subseteq A_{[n]}$

$$x_n \in A_{[n-1]} \Rightarrow [x_1[\dots[x_{n-1}, x_n]]] = 0$$

$$\forall x_1, x_2 \dots x_{n-1} \in A$$

$$[x_0[x_1[\dots[x_{n-1}, x_n]]]] = 0$$

$$\forall x_0, x_1, \dots x_{n-1} \in A \Rightarrow x_n \in A_{[n]}$$

* لنبرهن ان $A_{[n-1]}$ فضاء جزئي في $A_{[n]}$

ليكن $x_n, y_n \in A_{[n-1]}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha x_n + \beta y_n \in A_{[n-1]}$$

$$[x_1[\dots[x_{n-1}, \alpha x_n + \beta y_n]\dots]] =$$

$$\alpha[x_1[\dots[x_{n-1}, x_n]]] + \beta[x_1[\dots[x_{n-1}, y_n]]] = 0$$

$$\forall x_1, x_2 \dots x_{n-1} \in A$$

$$\Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \in A_{[n-1]}$$

ليكن $y \in [A_{[n-1]}, A_{[n]}]$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in A_{[n-1]} \\ x_{n+1} \in A_{[n]} \end{array}\right\} y = [x_n, x_{n+1}]$$

$$[x_1[\dots[x_{n-1}[x_n, x_{n+1}]\dots]] = 0 \quad \forall x_1, x_2 \dots x_n \in A$$

$\Rightarrow [x_1[\dots[x_{n-1}, y]\dots]] = 0$

$, y \in A_{[n-1]}$

$\Rightarrow [A_{[n-1]}, A_{[n]}] \subseteq A_{[n-1]}$

تعريف: أن المتسلسلة $A_{[0]}, A_{[1]}, A_{[2]} \dots\dots A_{[n]}$ متتالية من المثاليات المميزة في جبر لي تدعى **المتسلسلة المركزية المتزايدة**

السلسلة المركزية المتناقصة وجبور لي عديمة القوى

★ ليكن لدينا A جبر لي ولنعرف المتتالية

$C^1A = A$

$C^2A = [A, A]$

$C^3A = [A, [A, A]] = [A, C^2A]$.

⋮

$C^nA = [A, C^{n-1}A]$

نحصل على k متتالية من المثاليات المميزة في جبر لي A تدعى **المتسلسلة المركزية المتناقصة**

★ يقال عن جبر لي A انه **عديم القوى** اذا امكننا ايجاد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $C^mA = \{0\}$

وتدعو m اصغر عدد صحيح **دليل انعدام جبر لي A**

مبرهنة (٣٧) كل جبر لي عديم القوى يكون قابل للحل والعكس غير صحيح بالضرورة.

لكن A جبري عديم القوى ولنفرض ان دليله m حيث
$C^m A = \{0\}$.

باستخدام الاستقراء الرياضي نبرهن $\forall r \geq 1 \quad D^r A \subseteq C^{r+1} A$

- نثبت صحة القضية من اجل $r=1$

$$DA = [A, A] = C^2 A$$

- نفرض صحتها من اجل r ، $D^r A = C^{r+1} A$

- نبرهن صحتها من اجل $r+1$

$$D^{r+1} A = [D^r A, D^r A] \subseteq [A, C^{r+1} A] = C^{r+2} A$$

حسب الفرض الاستقرائي

وبالتالي العلاقة صحيحة $\forall r \geq 1$ وهي صحيحة من اجل ذلك العدد الصحيح الموجب m

$$D^m A \subseteq C^{m+1} A \subseteq C^m A = \{0\}$$

$$\Rightarrow D^m A = \{0\} \Rightarrow A \text{ قابل للحل}$$

نظرية (٣٨): كل مثالي في جبري A عديم القوى يكون عديم القوى

لدينا من الفرض A جبري عديم القوى دليله m

وليكن $A \subseteq J$ ولنبرهن ان J عديم القوى اي

$C^r J \subseteq C^r A \quad \forall r \geq 1$ باستخدام الاستقراء

من اجل $r=1$ فان $J \subseteq A$

نفرض صحة القضية من اجل r ولنبرهن من اجل $r+1$

$$C^{r+1} J = [J, C^r J] \subseteq [A, C^r A] \subseteq C^{r+1} A$$

فالقضية محققة $\forall r \geq 1$ وبالتالي صحيحة من اجل الدليل m

$C^m J \subseteq C^m A = \{0\}$ لان A عديم القوى

$$\Rightarrow C^m J = \{0\} \Rightarrow J \text{ عديم القوى.}$$

مبرهنة (٣٩) A جبري عديم القوى وليكن J مثالي في A عندئذ جبر الخارج A/J يكون عديم القوى

نشكل التشاكل القانوني $\phi : A \longrightarrow A/J$

$x \longrightarrow x+J$

باستخدام الاستقراء الرياضي لنبرهن

$$C^r(\phi(A)) = \phi(C^r A) \quad \forall r \geq 1$$

ومن اجل $r=1$

$$C^1(\phi(A)) = \phi(A) = \phi(C^1 A)$$

القضية صحيحة من اجل r ولنبرهن صحتها من اجل $r+1$

اي $C^{r+1}(\phi(A)) = \phi(C^{r+1} A)$

$$\mathcal{L}_1 : C^{r+1}(\phi(A)) = [\phi(A), C^r(\phi A)]$$

حسب الفرض الاستقرائي $= [\phi(A), \phi(C^r A)]$

$$= \phi[A, C^r A]$$

$$= \phi(C^{r+1} A)$$

صحيحة من اجل $\forall r \geq 1$

وبالتالي صحيح من اجل الدليل m

$$C^m(\phi(A)) = \phi(C^m A) = \phi(\{0\}) = J$$

$C^m(\phi(A)) = J$ وهو صفر جبر الخارج A/J

$\Leftarrow \phi(A)$ عديم القوى $\Leftarrow A/J$ عديم القوى.

انتهت المحاضرة العاشرة

الأكثرون يعرفون التضحية.. لكن هناك من يضحي لأجلك وهناك من يضحي بك

المحاضرة الحادية عشرة

الاربعاء ٢٦ صفر ١٤٣٩هـ
١٥ تشرين ٢٠١٧م

تمرين: لتكن لبينا القاعدة لـ $sl(2,\mathbb{C})$ حيث

$$S=\left\{e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

والمطلوب: جد صيغة killing لـ $sl(2,\mathbb{C})$
وبين فيما اذا كانت غير منحلة.

نظرية (١): A جبر لي عديم القوى على حقل k عندئذ السلسلة المركزية التصاعدية التالية تكون منقطعة.

$\{0\}=A_{[0]},\ A_{[1]}=\text{Cen}\,A,\ \ldots\ldots,\ A_{[n]}$

$\Rightarrow\ \exists\, t\geq 0 \qquad A_{[t]}=A$

سيتم اثباتها لاحقاً.

نتيجة (١): كل جبر لي عديم القوى على حقل k مغاير للصفر يملك مركزاً غير صفرياً.

لدينا A جبر لي عديم القوى $A\neq\{0\}$ ولنبرهن $\text{Cen}\,A\neq\{0\}$

نفرض جدلاً ان $\text{Cen}\,A=\{0\}$

عندئذ نلاحظ ان $A_{[0]}=\{0\}$

$A_{[1]}=\text{Cen}\,A=\{0\}$

$A_{[2]}/A_{[1]}\cong\text{Cen}(A/A_{[1]})$

بما ان $A_{[1]}=0\Rightarrow A/0=A$

$A_{[i]}/A_{[i-1]}\cong\text{Cen}(A/A_{[i-1]})\Rightarrow A_{[2]}\cong\text{Cen}(A)=\{0\}$

ملاحظة: في بناء السلسلة المتزايدة
$A_{[0]},A_{[1]},\ldots\ldots,A_{[n]}$
يبرهن على ان
$A_{[i]}/A_{[i-1]}\cong\text{Cen}(A/A_{[i-1]})$

/ /

المتتابعة كذا ان $\forall r \geq 0$ $A_{[3]} = \text{———} = A_{[r]} = \{0\}$

وبما ان A عديم المقوى فإن السلسلة المتزايدة منقطعة

$$\exists t \in \mathbb{Z}^{t} \quad A_{[t]} = A$$

اي انه $A=\{0\}$ وهذا يناقض كون $A \neq \{0\}$.

$$\Longrightarrow \operatorname{Cen} A \neq \{0\}.$$

تعريف: لتكن G جبر لي على حقل k ونعرف مناظم الجبر الجزئي S في G كما يلي

$$N_G(S) = \{ x \in G \quad ad_x(S) \subseteq S \}.$$

تمرين: حدد مناظم الجبر الجزئي $SL(2,\mathbb{C})$ من جبر لي $G(2,\mathbb{C})$

$$N_{GL}(SL(2,\mathbb{C})) = \{ M \in GL(2,\mathbb{C}) \quad ad_M(sL(2,\mathbb{C})) \subseteq sL(2,\mathbb{C}) \}.$$

$$= \{ M \in GL(2,\mathbb{C}) \; ; \; ad_M(M') \in sL(2,\mathbb{C}) \quad \forall M' \in sL(2,\mathbb{C}) \}.$$

$$= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) \; ; \; [M, M'] \in sL(2,\mathbb{C}) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) \; ; \; \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] \in sL(2,\mathbb{C}) \right\}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Galaxy

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{C})$$

نستنتج بوضوح ان

$$N(sl(2,\mathbb{C})) = Gl(2,\mathbb{C})$$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{C}$ لانه

$[M, M'] \in sl(2,\mathbb{C})$ حيث M تحقق الشرط دوماً

تمرين (٤٤) G جبري و $G/CenG$ عديم القوى بين أن G عديم القوى

لدينا $G/CenA$ جبري لي ج، نفرض m دليل انعدام القوى

$$C^m(G/CenA) = CenG$$

$$[G/CenG, [G/CenG, [\_\_\_\_ [G/CenG, G/CenG] \_\_]] = CenG$$

$$\Rightarrow [G, [G, \_\_\_\_ [G, G] \_\_]] + CenG = CenG$$

وذلك بملاحظة.

$$[G/CenA, [G/CenA, G/CenA]] = [G, [G, G]] + CenA$$

$$\overset{m\ \text{عدد}}{\Rightarrow} [G, [G, \_\_\_\_ [G, G]]] \leq CenA$$

$$\overset{m+1\ \text{عدد}}{\Rightarrow} [G, [G, [G, \_\_\_\_ [G, G]]] = \{0\}$$

$$\Rightarrow C^{m+1} G = \{0\} \Rightarrow$$ G عديم القوى.

نتيجة تقبل دون برهان: G جبري على حقل K عندئذ

I) G قابل للحل $\Leftrightarrow$ $D_G = [G, G]$ عديم القوى

II) $\Theta(n, \mathbb{C})$ جبري عديم القوى حيث $\Theta(n,\mathbb{C})$ مثلثية عليا وعناصر القطر الرئيسي اصفاراً $\forall n \geq 1$

/ /

تمرين $t(3,\mathbb{C})$ مثلثية عليا اثبت انها قابلة للحل

اي لنبرهن $D(t(3,\mathbb{C})) = [t(3,\mathbb{C})\ t(3,\mathbb{C})] \subseteq \theta(3,t)$

$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}}_{\beta}\right] = \alpha.\beta - \beta\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \delta & \Delta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \theta(3,\mathbb{C})$$

$$\Longrightarrow D(t(3,\mathbb{C})) \subseteq \theta(3,\mathbb{C})$$

نعلم ان كل جبر جزئي من جبر لي عديم القوى يكون عديم القوى

عندئذ $D(t(3,\mathbb{C}))$ جبر لي عديم القوى

ومنه حسب نتيجة سابقة فان $t(3,\mathbb{C})$ عديم القوى.

تمرين (٤٢) اذا كان $G \neq \{0\}$ جبر لي عديم القوى على حقل ما k

اثبت ان $Cen\,G \neq \{0\}$

بما ان G عديم القوى ولتكن m دليله اي $C^m G = \{0\}$

وبالتالي $[G, C^{m-1}G] = \{0\}$

نشير الى ان $C^{m-1}G \neq \{0\}$ ومنه $Cen\,G \neq \{0\}$

ومنه $[C^{m-1}G, G] = \{0\}$

$$\Longrightarrow C^{m-1}G \subseteq Cen\,G$$

بما ان $C^{m-1}G \neq \{0\}$ فان $Cen\,G \neq \{0\}$

صيغة Killing

G جبري على حقل F

$$k : G \times G \longrightarrow F$$

$$k(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y) \quad \forall x,y \in G$$

حيث tr هو اثر المصفوفة ومجموع عناصر قطرها الرئيسي

من الواضح انه شكل ثنائي الخطية وهو متناظر وذلك لملاحظة

$$k(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y) = tr(ad_y \circ ad_x) = k(y,x)$$

انتهت المحاضرة الحادية عشرة

اذا اضحك لك الزمان

فكن على حذر

لان الزمان لا يضحك طويلا"