دورتين

حل اسئلة الفصل الثاني+ التكميلي 2017

اسئلة الدورة الثانية 2017

السؤال الأول :

1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية.

2) اكتب قوانين كلبر ثم بين أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما وعكسا مع مربع البعد بينهما.

السؤال الثاني :

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد اي $F=-\frac{mk^2}{x^3}$

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء في اللحظة $t=0$ بحيث تركت النقطة بدون سرعة ابتدائية $(t=0\,,x=a\,,x'=0)$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع (o) بداية الحركة .

السؤال الثالث :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونصف قطرها a أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النقطة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

السؤال الرابع :

توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري افقي نصف قطره a .أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f فالمطلوب تعيين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف.

السؤال الأول

1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية

انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c}$

في الحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك في الحالة العامة $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

إلا بإضافة الحدين $(\vec{J_e}, \vec{J_c})$

مثلاً إذا أخذنا كمية الحركة $;(v = v_a)$ $\quad d(mv) = F.dt$

أما الحركة النسبية $;(v = v_r)$ $\quad d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c.dt$

كذلك في الطاقة الحركية $;(v = v_a)$ $\quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr$

وفي حالة الحركة النسبية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$

لدينا : $J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$

لأن $\left(\frac{dr}{dt}, dr\right)$ شعاعان متوازيان

وأصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr}$

وهي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

2) اكتب قوانين كلبر ثم بين أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما وعكسا مع مربع البعد بينهما.

الحل

يوجد في ميكانيك السماوي ثلاثة قوانين توصل لها العالم كبلر اعتماداً على كثير من التجارب الفلكية وتنص هذه القوانين على ما يلي:

القانون الأول : تتحرك الكواكب حول الشمس ومسار كل منها مستوي وحركتها تكون خاضعة لقانون السطوح .

القانون الثاني : مسار كل كوكب قطع ناقص تقع الشمس في إحدى محرقيه.

القانون الثالث : مربع دور حركة كل منها يتناسب عكساً مع مكعب نصف المحور الكبير للقطع الناقص

المعطى بالعلاقة....... $\boxed{F = -\frac{mc^2}{r^2 P}}$

حسب قانون الفعل ورد الفعل يكون $F_1 = F_2 = |F| \dots (1)$

إذاً $-\frac{\mu\, m}{r^2} = -\frac{\lambda\, M}{r^2} \Longrightarrow \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda_n}{m_n} = const$

حيث $\frac{\lambda_n}{m_n} = f$ تسمى نسبة غاوس الثابتة لكل كوكب ما على كتلته .

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f$$

$$\mu = fM \qquad ; \qquad \lambda = fm$$

وبالتالي بتعويض قيمة (λ, μ) بالمساواة (1) نحصل على القانون :

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\lambda M}{r^2} \Longrightarrow \boxed{F = f\frac{Mm}{r^2}}$$

هذه الصيغة تبين أن قانون التجاذب الشهير الذي ينص على أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما البعض بقوى تتناسب طرداً مع جداء كتلتيهما وعكساً مع مربع البعد بينهما و هو قانون التجاذب العالمي

السؤال الثاني

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد اي $F = -\frac{mk^2}{r^3}$

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء في اللحظة $t = 0$ بحيث تركت النقطة بدون سرعة ابتدائية $(t = 0\,, x = a\,, x' = 0)$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع (o) بداية الحركة .

الحل

1) حسب قانون التحريك الأساسي $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد : $-\frac{mk^2}{x^3} = m\,x'' \Longrightarrow x'' = -\frac{k^2}{x^3}$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية .لحلها نضرب الطرفين بـ $2x'$ فنجد :

$$\boxed{2x'.x'' = -\frac{2x'k^2}{x^3}}$$

بالمكاملة نجد : $x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \dots\dots (*)$

لإيجاد الثابت c_1 من شروط البدء $((\ x = a \ ,\ v = x' = 0\ ))$ نجد :

$$0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{k^2}{a^2}$$

بتعويض قيمة (c_1) بالمعادلة $(*)$ نجد :

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} \xRightarrow{\text{بتوحيد المقامات}} x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2.a^2}$$

بجذر التربيع نجد $x' = \pm\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$

نختار الإجابة السالبة لان القوة جاذبة نحو (o) .

ومنه $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x' = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$

و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات من المرتبة الأولى .

$$\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}dt \Rightarrow -\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{k}{a}t + c_2$$

لإيجاد الثابت (c_2) من شروط البدء نجد : $c_2 = 0 \Leftarrow \sqrt{a^2-a^2} = \frac{k}{a}(0) + c_2$

ومنه $-x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 - a^2 \Leftarrow a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 \Leftarrow \sqrt{a^2-x^2} = \frac{k}{a}t$

وبالتالي معادلة الحركة هي $x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2} \xLeftarrow{\text{بجذر}} x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2$

نأخذ الاشارة الموجبة ((لأن الحركة للأمام)) $\boxed{x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2}}$

(2 لإيجاد الزمن لحظة وصول النقطة إلى الموضع o

من العلاقة $\boxed{\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}dt}$ نجد :

$$\int_a^0 \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_0^t \frac{k}{a}dt \Rightarrow \left[-\sqrt{a^2-x^2}\right]_a^0 = \left[-\frac{k}{a}t\right]_0^t$$

$$a = \frac{k}{a}t \Rightarrow \boxed{t = \frac{a^2}{k}}$$

السؤال الثالث

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونصف قطرها a أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النقطة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q = \theta$ إحداثي معمم))

$$x = a.\cos\theta \quad , \quad y = a.\sin\theta$$

الحل

حسب معادلة لاغرانج $\quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T+u)}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial \theta} = 0$$

ولدينا : $\quad v_r^2 = x'^2 + y'^2 \Longleftarrow v_r = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \quad ; \quad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$$x' = -a.\sin\theta\,.\theta' \quad , \quad y' = a.\cos\theta\,.\theta'$$

$$v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + a^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2$$

$$v_r^2 = a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,.\theta'^2 \Longrightarrow v_r^2 = a^2.\theta'^2$$

$$u = -\int mg\ dy = -mg\,y \Longrightarrow u = -mg.a.\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad ; \quad v_a = v_r + v_e$$

$$v_e = \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \boxed{v_e = -\omega x\,\vec{k}}$$

$$v_e^2 = \omega^2 a^2.\cos^2\theta$$

$$v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 \Longrightarrow v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 x^2$$

$$\boxed{v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 a^2.\cos^2\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2.\theta'^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\omega^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta''$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$ma^2.\theta'' + m\omega^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta + mga.\cos\theta = 0$$

$$\boxed{ma[a\,\theta'' + \omega^2 a\cos\theta.\sin\theta + g.\cos\theta] = 0}$$

السؤال الرابع

توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري افقي نصف قطره a .أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f فالمطلوب : تعيين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف.

الحل

- لنأخذ مبدأ القياس موضع الحلقة لحظة البدء.
- القوى المؤثرة:
  - ✓ المقاومة R_τ التي جهتها بعكس اتجاه الحركة.
  - ✓ رد الفعل الناظمي R_N الواقع في المستوي النظامي.
  - ✓ قوة الثقل $P = mg$

في هذه الحالة بإسقاط علاقة التحريك الأساسي نحصل على المعادلات الذاتية لحركة الحلقة:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -R_\tau \quad , \quad m\frac{v^2}{\rho} = R_n \quad , \quad 0 = R_b - P}$$

بما أن: $R_\tau = f|R_N| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

لدينا من المعادلات الذاتية: $R_n = m\frac{v^2}{\rho}$ و $R_b = P = mg$

$$\Rightarrow R_\tau = mf\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + g^2}$$

$$\Rightarrow R_\tau = \frac{\boldsymbol{mf}}{\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{v^4 + a^2 g^2}}$$

حيث أن نصف قطر تقوس الدائرة يساوي a

ومن أجل المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف نكتب الطرف الأيسر بالاعتماد على المعادلات الذاتية بالشكل:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{m\frac{dv}{ds}\ v}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m\frac{dv}{ds}\ v = -\frac{mf}{a}\sqrt{v^4 + a^2g^2}}$$

بتقسيم الطرفين على m:

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{a}\sqrt{v^4 + a^2g^2}$$

بفصل المتحولات:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv^2}{\sqrt{v^4 + a^2g^2}} = -\frac{2f}{a}\int_0^s ds$$

بالمكاملة:

$$s = \frac{a}{2f}ln\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + a^2g^2}}{v^2 + \sqrt{v^4 + a^2g^2}}$$

وفي لحظة توقف الحلقة عن الحركة يكون لدينا $v = 0$ وبالتالي نجد أن المسافة المطلوبة:

$$s^* = \frac{a}{2f}ln\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + a^2g^2}}{ag}$$

ملاحظة هامة:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arcsh}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) + c$$

" انتهى حل الدورة ^_^ "

اسئلة الدورة التكميلية 2017

السؤال الأول :

ادرس حركة نقطة مادية M على المستقيم ox بافتراض أن النقطة تخضع لقوة من الشكل $F = -cx$ حيث c ثابت موجب .

السؤال الثاني :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة تتحرك على دائرة شاقولية من الداخل نصف قطر هذه الدائرة a فاذا علمت أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء في أخفض مكان على الدائرة وأعطيت سرعة ابتدائية افقية مقدارها $v_0 \neq 0$ وأن الحركة تتم بدون احتكاك فالمطلوب :

1) تحديد سرعة النقطة المادية ثم ايجاد رد الفعل .

2) ايجاد شرط انفكاك النقطة عن الدائرة .

السؤال الثالث :

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على الحلزون للغاريتمي الافقي $r = e^{-\theta}$ مجذوبة من القطب o بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب وقيمتها $\vec{F} = -2m\vec{r}$ تُركت النقطة المادية بدون سرعة ابتدائية من موضع M_0 حيث $\theta = 0$ ، أوجد حركة النقطة المادية بالاعتماد على تكامل الطاقة .

السؤال الرابع :

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب $F = -\lambda OM$ أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول

ادرس حركة نقطة مادية M على المستقيم ox بافتراض أن النقطة تخضع لقوة من الشكل $F = -cx$ حيث c ثابت موجب .

الحل ^_^

بالانطلاق من قانون التحريك الاساسي (قانون نيوتن الثان) $\sum \vec{F} = m\vec{\Gamma}$

$$mx'' = -cx \Rightarrow x'' = -\frac{c}{m}x$$

نرمز ل $((\frac{c}{m}))$ ب k^2 .. $\boxed{x'' = -k^2x}$..... $(*)$

و هي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة وبدون طرف ثاني تقبل حل من الشكل ..

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$

لإيجاد الحل العام نفرض الحلول الخاصة من الشكل: $x = e^{\lambda t}$

نوجد x'' ونعوضها في $(*)$....

$$x' = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

فنجد :

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0$$

ومنه المعادلة المميزة هي ... $\lambda^2 + k^2 = 0$

وجذرها $\lambda_2 = ik$, $\lambda_1 = -ik$ حيث λ_1, λ_2 جذور المعادلة المميزة

نعوض λ_1, λ_2 بالمعادلة التفاضلية..

$$x = c_1e^{ikt} + c_2e^{-ikt}$$

نعلم أن: $e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt \quad \&\& \quad e^{-ikt} = \cos kt - i\sin kt$

$$x = (c_1\cos kt + c_1\, i\sin kt) + (c_2\cos kt - c_2\, i\sin kt)$$

$$x = (c_1 + c_2)\cos kt + (c_1 - c_2)i\sin kt$$

بفرض $(c_1 + c_2) = A \quad \&\& \quad (c_1 - c_2)i = B$

فتصبح.. $\boxed{x = A\cos kt + B\sin kt}$ وهي معادلة الحركة الاهتزازية

السؤال الثاني

لتكن M نقطة مادية ثقيلة تتحرك على دائرة شاقولية من الداخل نصف قطر هذه الدائرة a فاذا علمت أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء في أخفض مكان على الدائرة وأعطيت سرعة ابتدائية افقية مقدارها $v_0 \neq 0$ وأن الحركة تتم بدون احتكاك فالمطلوب :

1) تحديد سرعة النقطة المادية ثم ايجاد رد الفعل .
2) ايجاد شرط انفكاك النقطة عن الدائرة .

الحل ^_^

1) لنأخذ المحورين ox, oy في مستوي الدائرة ، مبدأهما في مركز الدائرة والمحور oy شاقولي صاعد ، يتحدد وضع النقطة M على الدائرة بوسيط واحد ، ولتكن الزاوية θ المحصورة بين oM والمحور ox .

نطبق نظرية الطاقة الحركية من أجل تحديد السرعة :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg.dy \Rightarrow \frac{m}{2}d(v^2) = -mg.dy$$

$$\Rightarrow d(v^2) = -2g.dy \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

حيث $y_0 = -a$ حسب شروط البدء وعليه فإن سرعة النقطة M هي

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y + a)$$

أما من أجل تحديد رد الفعل الناظمي (N) نستخدم المعادلة الثانية من المعادلات الذاتية وهي :

$$\frac{mv^2}{\rho} = F + N \Rightarrow \frac{mv^2}{\rho} = mg.a\sin\theta + N$$

حيث : $F = mg.y = 0$ ، وبما أن الحركة دائرة فإن $\rho = a$ و $y = a.\sin\theta$ نجد :

$$\frac{mv^2}{a} = mg.y + N \Rightarrow N = \frac{m}{a}\left(v_0^2 - 2g(y + a)\right) - mgy$$

$$\Rightarrow N = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g) - mgy$$

(2

تستطيع النقطة الانفكاك عن الدائرة عند تحقق شرط $N = 0$ إذاً يجب أن تتحقق المساواة :

$$0 = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g) - mgy$$

وعليه النقطة المادية تنفك في الموضع $M(x, y)$

$$\Longrightarrow mgy = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g)$$

$$\Longrightarrow gya = v_0^2 - 2gy - 2a.g$$

$$\Longrightarrow gya + 2gy = v_0^2 - 2a.g$$

$$y(ga - 2g) = v_0^2 - 2a.g \Longrightarrow y = \frac{(v_0^2 - 2a.g)}{(ga - 2g)}$$

إن معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 = a^2$ ومنه

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

والانفكاك على محيط الدائرة في المحل $-a < y < a$

$$-a < \frac{(v_0^2 - 2a.g)}{(ga - 2g)} < a$$

$$\Longrightarrow -a(ga - 2g) < (v_0^2 - 2a.g) < a(ga - 2g)$$

$$\Longrightarrow -(ga - 2g) + 2a.g < v_0^2 < a(ga - 2g) + 2a.g$$

إن $v_0^2 > -a(ga - 2g) + 2a.g$ محقق دوماً

أما الشرط $v_0^2 < a(ga - 2g) + 2a.g$ فيجب أن يتحقق من أجل أن تنفصل النقطة عن الدائرة .

السؤال الثالث

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على الحلزون للغاريتمي الافقي $r = e^{-\theta}$ مجذوبة من القطب o بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب وقيمتها $\vec{F} = -2m\vec{r}$ تُركت النقطة المادية بدون سرعة ابتدائية من موضع M_0 حيث $\theta = 0$ ، أوجد حركة النقطة المادية بالاعتماد على تكامل الطاقة .

الحل ^_^

القوة المؤثرة على النقطة المادية هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة $\vec{F} = -2m\vec{r}$

حسب ما وجد بالمثالين السابقين ((المثال (1) والمثال (2))) أن القوة الثقالة هي قوة كمونية والقوة F هي قوة كمونية $u = \int p\,.dr + \int F\,.dr$

حيث $\int p\,.dr = 0$ اي معدومة لان القوة عامودية على الانتقال .

وحسب المثال السابق (2) وجدنا $u = -mr^2$

ونعلم أن قانون تكامل الطاقة يعطى بالعلاقة التالية : $T = u + h$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mr^2 + h \ldots.(*)$$

وحسب الشروط الابتدائية $(\theta = 0, v = 0)$ ومنه $r = 1$ نجد : $h = m$

وبتعويض $h = m$ بالمعادلة $(*)$ نجد : $\frac{1}{2}mv^2 = -mr^2 + m$

$$\frac{1}{2}mv^2 = m(1 - r^2) \Rightarrow v^2 = 2(1 - r^2) \ldots (1)$$

$$\boxed{v^2 = r'^2 + r^2\theta'^2} \quad ; \quad r' = -e^{-\theta}.\theta'$$

$$v^2 = e^{-2\theta}.\theta'^2 + e^{-2\theta}.\theta'^2 \Rightarrow v^2 = 2e^{-2\theta}.\theta'^2 \Rightarrow v^2 = 2r'^2 \ldots (2)$$

بمساواة العلاقة (1) والعلاقة (2) نجد : $2r'^2 = 2(1 - r^2)$

$$\Rightarrow r'^2 = (1 - r^2) \Rightarrow r' = \sqrt{(1 - r^2)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى قابلة لفصل المتحولات :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{(1 - r^2)} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{(1 - r^2)}} = dt \Rightarrow \boxed{t = arc\sin r}$$

تعود النقطة المادية إلى القطب o في اللحظة $t = 0$ عندما يكون $r = 0$

السؤال الرابع

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب $F = -\lambda OM$ أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .

الحل ^_^

نعلم أن معادلات القطع الناقص هي : $y = b.\sin\theta \quad , \quad x = a.\cos\theta$

نعلم أن معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T+u)}{\partial q_j} = 0$

القوة الجاذبة مركزية $F_1 = -m\,\lambda^2 r$ ، وقوة الثقل $P = mg$

ونعلم أن الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2)$ $\qquad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$y' = b\cos\theta\,.\theta'$, $x' = -a\sin\theta\,.\theta'$

ومنه السرعة النسبية $\boxed{v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + b^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2} \Leftarrow v_r^2 = x'^2 + y'^2$

والسرعة الجرية

$$\overrightarrow{v_e} = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_e} = -\omega\, a\cos\theta\,.\vec{k} \Longrightarrow \boxed{v_e^2 = \omega^2.a^2.\cos^2\theta}$$

بتعويض في قانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m[(a^2.\sin^2\theta + b^2.\cos^2\theta).\theta'^2 + \omega^2.a^2.\cos^2\theta]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m(a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta\,.\sin\theta)\theta'^2 - \omega^2 a^2\cos\theta\,.\sin\theta$$

القوة M تخضع لقوتين)) u_1 هي قوة الثقل و u_2 قوة الجذب ((واخذنا الثقل سالب لانه عكس دوران oy

$$u_1 = -\int mg\ dy = -mgy \Longrightarrow u_1 = -mgb\sin\theta$$

$$u_2 = -\int m\lambda^2 r.dr \Longrightarrow u_2 = -m\lambda^2\frac{r^2}{2}$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}oM^2 \Longrightarrow u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(a^2.cos^2\theta + b^2.sin^2\theta)$$

$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow \boxed{u = -mgb\,sin\,\theta - \frac{m\lambda^2}{2}(a^2.cos^2\theta + b^2.sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mgb.\cos\theta + m\lambda^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta - m\lambda^2 b^2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$(a^2\sin^2\theta + \mathrm{b}^2\cos^2\theta)\theta'' = (a^2\sin\theta\,cos\,\theta - b^2\cos\theta.\sin\theta)\theta'^2$$
$$-\omega^2 a^2\cos\theta.\sin\theta - gb.\cos\theta + \lambda^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta - \lambda^2 b^2\,sin\,\theta\,cos\,\theta)$$

" انتهى حل الدورة ^_^ "

حل تمرين الوظيفة بالمحاضرة 13

تسقط نقطة مادية ثقيلة M دون سرعة ابتدائية ودون احتكاك من النقطة A الواقعة على ارتفاع h على الطريق الذي ينتهي بدائرة نصف قطرها r

المطلوب:

احسب ارتفاع النقطة M بحيث يمكن للنقطة M أن تجتاز كل الطريق دون أن تنفك عنه

الحل

يتعيّن وضع النقطة M على الطريق بوساطة الزاوية φ الواقعة بين الشاقول و $\overrightarrow{oM}$

وطبقاً لمبدأ دالامبير تكون محصلة القوى المؤثرة في النقطة المادية تساوي الصفر

لنفرق قوة العطالة $J = -m\Gamma$ إلى قسمين:

(1) $J_T = -m\Gamma_T = -m\frac{dv}{dt}$ يتجه بعكس جهة $\frac{dv}{dt}$ أي نحو الأعلى (لأن السرعة متناقصة)

(2) $J_N = -m\Gamma_N = -m\frac{v^2}{a}$ يتجه بعكس جهة التسارع الناظمي أي نحو الخارج

أما رد الفعل سيكون في جهة الحركة أي نحو داخل الدائرة و هكذا نجد:

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{J_T} + \overrightarrow{J_N} = 0 \dots\dots (1)$$

نسقط على $\overrightarrow{oM}$ فنجد بسهولة:

$$P\,cos\varphi + m\frac{v^2}{a} - R = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R = P\cos\varphi + m\frac{v^2}{a} = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{a}} \dots\dots (2)$$

وهذه المعادلة تحوي السرعة ومن الضروري حسابها من قانون تغير الطاقة الحركية:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 = mg[h - (a - a\cos\varphi)]$$

حيث المقدار $a - a\cos\varphi$ أتى من معادلة المسار ومنه:

$$m\frac{v^2}{a} = \frac{2mg}{a}[h - a + a\cos\varphi] \dots\dots (3)$$

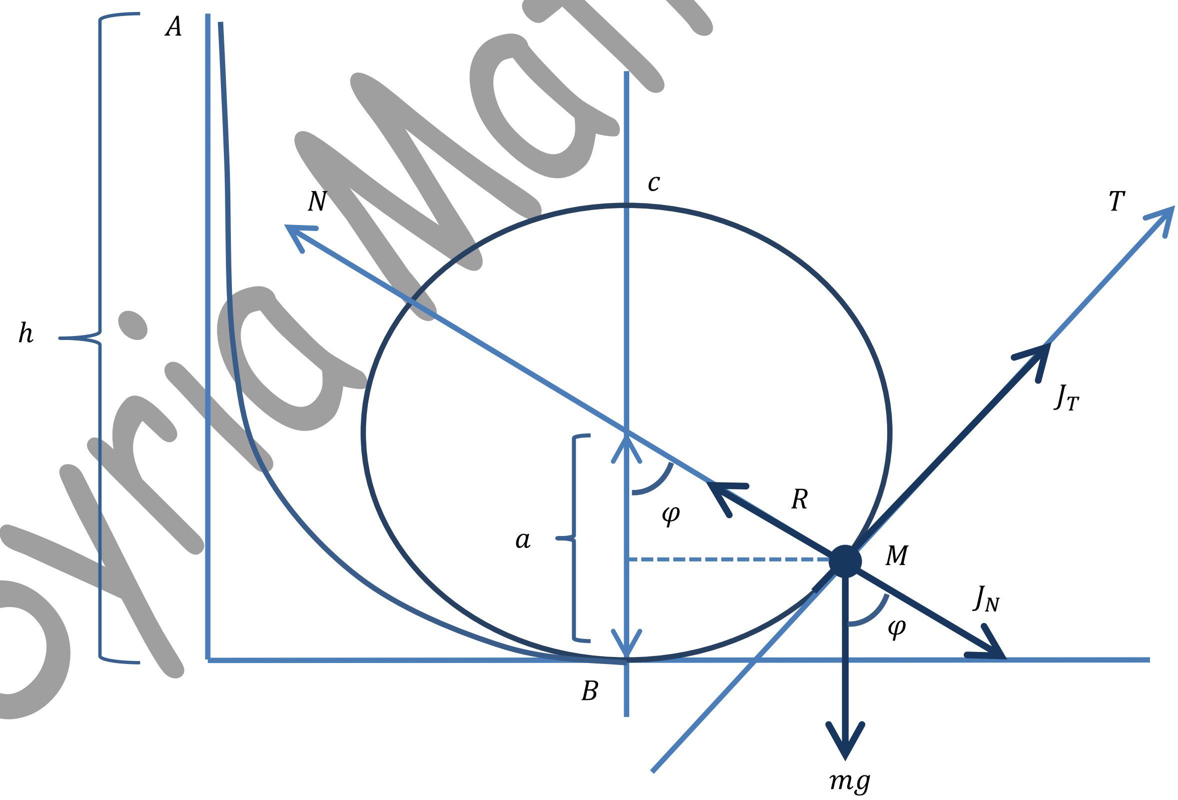
بالتعويض في (2):

$$R = P\left(2\frac{h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right) \dots\dots (4)$$

ولكي لا تنفك النقطة يجب أن يبقى المقدار R أكبر أو يساوي الصفر أي أن:

$$2\frac{h}{a} - 2 + 3\cos\varphi \geq 0$$

فإذا علمنا أن احتمال انفكاك النقطة يكون أعظمياً عندما تكون سرعتها أصغرية فإن الانفكاك قد يحدث في أعلى نقطة من الطريق الدائري عند $\varphi = \pi$



إعداد: محمد علي فليون