18-12-2017

نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة: الثانية والعشرون ◄ عنوان المحاضرة: مودول الفتل

مبرهنة : تغير قاعدة مودول : ليكن $f: A \longrightarrow B$ تشاكل حلقي حيث A, B حلقات وليكن M مودول على B عندئذ M مودول على A وكذلك اذا كان المودول M منتهي التوليد كمودول على Aفهو منتهي التوليد كمودول على B .

الحل :

لدينا M مودول على الحلقة B أي يوجد قانون تشكيل داخلي وليكن

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

$$(m_1, m_2) \longrightarrow m_1 + m_2$$

ويجعل البنية $(M, +)$ زمرة تبديلية .

ولنعرف القانون التشكيل الخارجي على المودول M الذي مجموعة مؤثراته الحلقة A كما يلي

$$* : A \times M \longrightarrow M$$

$$(a, m) \longrightarrow a * m = \underbrace{f(a)}_{\in B} . \underbrace{m}_{\in M} \in M$$

توضيح : حيث قانون $(.)$هو قانون التشكيل الخارجي الذي مجموع مؤثراته Bالمعرف على M (كون M مودول على B فرضاً) اذاً لدينا $(M, +)$ زمرة تبديلية و بقي أن نبرهن أن القانون $(*)$يحقق الشروط الأربعة بالنسبة للقانون الخارجي

١) $\forall m, m_1, m_2 \in M \ , \ \forall \varphi, \beta \in A$

- $1_A * m \underbrace{=}_{\text{حسب تعريف القانون لها}} f(1_A).m \underbrace{=}_{\text{لان } M \text{ مودول على } B \text{ تشاكل } f} \underbrace{1_B.m}_{} = m$

- $\varphi * (m_1 + m_2) = f(\varphi).(m_1 + m_2) = f(\varphi)m_1 + f(\varphi)m_2 = \varphi * m_1 + \varphi * m_2$

- $(\varphi + \beta) * m = f(\varphi + \beta).m = \big(f(\varphi) + f(\beta)\big).m$
$= f(\varphi).m + f(\beta).m = \varphi * m + \beta * m$

- $(\varphi.\beta) * m = f(\varphi.\beta).m = \underbrace{\big(f(\varphi).f(\beta)\big)}_{\text{لان } f \text{ تشاكل}}.m = \underbrace{f(\varphi).\big(f(\beta).m\big)}_{\text{التجميعية محققة لأن } M \text{ مودول على } B \text{ فرضاً}}$
$= f(\varphi).(\beta * m) = \varphi * (\beta * m)$

مما سبق نلاحظ $(M,+,*)$ مودول على الحلقة A .

ولدينا M مودول منتهي التوليد كمودول على A أي توجد $S=\{m_1,,,,,m_n\}$ مولدة ل M وبعبارة أخرى

$$m\in M \implies \exists a_1,,,,,a_n\in A \ : \ m=a_1 \underbrace{*}_{\text{هو المعرف على } M \text{ كمودول على } A} m_1+,,,,+a_n*m_n$$

ومنه

$$m=f(a_1) \underbrace{.}_{\text{قانون التشكيل الخارجي المعرف على } M \text{ كمودول على } B} m_1+,,,,,+f(a_n).m_n$$

وبالتالي لاجل كل $m\in M$ يوجد $f(a_1),,,,,,,,f(a_n)\in B$

بحيث

$$m=\sum_{i=1}^{n} f(a_i)m_i$$

ومنه $S=\{m_1,,,,,,,,,m_n\}$ مولدة ل M كمودول على B أي أن المودول M منتهي التوليد كمودول على B .

ملاحظة : يمكن أن يأتي سؤال امتحاني اذكر نص مبرهنة تغيير قاعدة المودول مع البرهان .

مودول الفتل

تعريف : ليكن M مودول على الحلقة A وليكن $m\in M$ عندئذ :

$$m \text{ عنصر فتل } \Leftrightarrow \ \exists\, \alpha\in A^* \ ; \ \alpha.m=0$$

ولنرمز ب $Tor(M)$ لمجموعة كل عناصر الفتل في M أي أن

$$Tor(M)=\{m\in M : m \text{ عنصر فتل}\}$$

إن $Tor(M)$ تشكل مودول جزئي من M ويدعى مودول الفتل (الاثبات وظيفة وليكم الحل)

إن $Tor(M)$ هو مودول جزئي من M لأن :

$$\forall \lambda,\beta\in A \ , \ \forall\, m_1,m_2\in Tor(M)$$

إن $Tor(M)\neq\emptyset$ لأن $0\in Tor(M)$

Syria Math Team

ولنثبت $\lambda m_1 + \beta m_2 \in Tor(M)$

$$\exists\, \alpha_1 \in A^* \,;\, \alpha_1 . m_1 = 0 \iff m_1 \in Tor(M)$$

$$\exists\, \alpha_2 \in A^* \,;\, \alpha_2 . m_2 = 0 \iff m_2 \in Tor(M)$$

$$\alpha_1 . \alpha_2 (\lambda m_1 + \beta m_2) = (\alpha_1 . \alpha_2 \lambda m_1 + \alpha_1 . \alpha_2 \beta m_2)$$

$$= \alpha_2 \lambda \left(\underbrace{\alpha_1 m_1}_{=0} \right) + \alpha_1 . \beta \left(\underbrace{\alpha_2 m_2}_{=0} \right) = 0 + 0 = 0 \quad : \quad \alpha_1 . \alpha_2 \neq 0$$

واستفدنا من كون A حلقة تبديلية

ومنه $\lambda m_1 + \beta m_2 \in Tor(M)$ ومنه $Tor(M)$ مودول جزئي من M .

ملاحظات : ليكن M مودول على A عندها يعرف :

١) إذا كان $Tor(M) = M$ عندئذ ندعو M مودول فتل .(مثال الزمر التبديلية المنتهية).
٢) إذا كان $Tor(M) = \{0\}$ عندئذ ندعو M مودول بلا فتل .
٣) اذا كان M مودول فتل عندها

$$\underbrace{ord(M)}_{\text{تسمية ثانية } Ann(M)} = \{\alpha \in A : \alpha . m = 0 : \forall\, m \in M\} \subseteq A$$

وتشكل مثالي في A

مبرهنة : ليكن M مودول حر و منتهي التوليد عندها M مودول بلا فتل.

البرهان :

M مودول بلا فتل $\iff Tor(M) = 0$

أي لنبرهن أن $Tor(M) = 0$

لدينا M مودول حر اذاً توجد قاعدة منتهية ل M ولتكن $S = \{m_1, m_2, \dots\dots, m_n\} \subseteq M$

ليكن $m \in Tor(M)$ ومنه

$$m \in Tor(M) \Longrightarrow m \in M \ \wedge\ \exists a \in A^* : a . m = 0$$

وبالتالي $m \in M$ و S قاعدة ل M

Syria Math Team

$$\Longrightarrow \exists a_1,,,,,,a_n \in A$$

$$m \underset{*}{=} a_1m_1+,,,,,,+a_nm_n$$

ولدينا $a.m = 0$

$$0 = a(a_1m_1+,,,,,,+a_nm_n) = a(a_1m_1) + \cdots + a(a_nm_n)$$
$$0 = (aa_1)m_1 + \cdots + (aa_n)m_n$$

وبما أن S قاعدة ل M فهي مستقلة خطيا أي سيكون : $aa_i = 0$ وذلك ايا كان $i = 1,2,\ldots\ldots,n$

وكون A حلقة تبديلية رئيسية أي هي منطقة تكاملية (لاتحوي قواسم الصفر) و $a \neq 0$ فيكون : $a_i = 0$ وبالتعويض في $*$ نجد أن $i = 1,2,\ldots\ldots,n$

$$m = 0 \Longrightarrow Tor(M) = 0$$

ومنه M مودول بلا فتل .

مبرهنة : ليكن M مودول على A عندها مودول الخارج $M/Tor(M)$ بلا فتل .

البرهان :

نريد اثبات أن $\frac{M}{Tor(M)}$ بلا فتل أي $Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) = 0_{M\backslash Tor(M)} = Tor(M)$

ليكن

$$\tilde{m} \in Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) \Longrightarrow \tilde{m} \in \frac{M}{Tor(M)} \quad \text{و}' \quad \exists a \in A^* : a.\tilde{m} = Tor(M)$$
$$\tilde{m} = m + Tor(M) \quad : \quad m \in M \text{ ومنه}$$

$$\text{و } Tor(M) = a.\tilde{m} = a\big(m + Tor(M)\big) = a.m + Tor(M)$$
$$\Longrightarrow a.m \in Tor(M)$$

وبالتالي $b(a.m) = 0$: $\exists b \in A^*$ ولان التبديلية محققة $(ba)m = 0$ حيث $b.a \in A^*$

ومنه $m \in Tor(M)$ اذاً

وبالتالي $\tilde{m} = m + Tor(M) = Tor(M)$

$$Tor\left(\frac{M}{Tor(M)}\right) = Tor(M)$$

أمثلة :

١) $G=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ زمرة تبديلية منتهية ($\mathbb{Z}-$ مودول)كل عناصرها هي عناصر فتل (كما رأينا سابقاً)اذا
$$Tor(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$
وبالتالي يمكن تعميمها بأن كل زمرة تبديلية منتهية هي مودول فتل دوماً .

٢) $\mathbb{Z}$ مودول حر على $\mathbb{Z}$.

بما أن $\mathbb{Z}$ مودول حر فإن $\mathbb{Z}$ هي بلا فتل .

ملاحظة : اذا كان لدينا $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ مودول فتل فإن $ord(G)=n\mathbb{Z}$ دوماً .

٣) $G=\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ مودول فتل عندئذ :
$$ord(G)=\{\varphi\in\mathbb{Z}\ :\ \varphi.\bar{a}=0\ \ :\ \ \bar{a}\in G\}=8\mathbb{Z}$$

٤) $G=\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ مودول فتل لان G زمرة تبديلية منتهية

اذاً $Tor(G)=G$ وبالتالي $ord(G)=2\mathbb{Z}$ حيث 2 المضاعف المشترك الاصغر ل 2,2

٥) $G=\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ مودول فتل لان G زمرة تبديلية منتهية و
$$ord(G)=12\mathbb{Z}$$
حيث ال 12 هو المضاعف المشترك الأصغر للاعداد (6,4,3) .

٦) ليكن لدينا $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ مجموعات الاعداد الحقيقة والصحيحة والعادية أن $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ هي مودولات على الحلقة $\mathbb{Z}$ وأن $\mathbb{Z}$ مودول جزئي منهما ولناخذ مودولات الخارج $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}},\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ أوجد عناصر الفتل لهذه المودولات.

الحل :

لنوجد عناصر الفتل ل $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$$\tilde{m}\in Tor\left(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)\Rightarrow\tilde{m}=q+\mathbb{Z}\ :\ q\in\mathbb{Q}\ \ و'\ \exists a\in\mathbb{Z}^*:a.\tilde{m}=\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}=a.\tilde{m}=a(q+\mathbb{Z}\ )=a.q+\mathbb{Z}$$
ومنه فإن $a\in\mathbb{Z}^*$ و $a.q\in\mathbb{Z}$ وبالتالي
$$\exists z\in\mathbb{Z}\ :\ \ z=a.q$$
ومنه $q=\frac{z}{a}$ اذاً $q\in\mathbb{Q}$
وبالتالي $\tilde{m}=q+\mathbb{Z}\ \ \in\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

أي أن $Tor(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

لنوجد عناصر الفتل ل $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$\tilde{m} \in Tor\left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right) \Rightarrow \tilde{m} = q + \mathbb{Z} \ : q \in \mathbb{R} \text{ و } \exists a \in \mathbb{Z}^* : a.\tilde{m} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} = a.\tilde{m} = a(q + \mathbb{Z}\ ) = a.q + \mathbb{Z}$$

ومنه فإن $a \in \mathbb{Z}^*$ و $a.q \in \mathbb{Z}$ وبالتالي

$$\exists z \in \mathbb{Z} : \ z = a.q$$

ومنه $q = \frac{z}{a}$ اذاً $q \in \mathbb{Q}$

وبالتالي $\tilde{m} = q + \mathbb{Z} \ \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

أي أن $Tor(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$. في كلا الحالتين عناصر الفتل هي $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

تمرين : لنأخذ L مجموعة كل الاعداد العادية الموجبة تماما $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ من الشكل $r = \frac{p}{q}$ حيث أن العددين q, p أعداد صحيحة تقبل القسمة فقط على الأعداد الأولية التالية 7,5,3,2 . إن هذه المجموعة تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لقانون الضرب المألوف وبالتالي تشكل مودول على $\mathbb{Z}$. والمطلوب بين وبالتفصل فيما اذا كان المودول L هو مودول حر ومنتهي التوليد أم لا ؟ (يمكنك الاعتماد على تعريف المودول الحر لحل التمرين).

الحل :

لنأخذ $S = \{2,3,5,7\}$

$$\forall x \in L \ : \ x = (2)^n.(3)^m.(5)^t.(7)^k$$

ومنه S تولد L ولنثبت انها مستقلة خطياً أي أن :

$$0 = \left(n \underbrace{\cdot}_{\text{قانون التشكيل الخارجي}} 2\right) \underbrace{+}_{\text{قانون التشكيل (الداخلي) المألوف}} (m.3) + (t.5) + (k.7)$$

بالانتقال من قانون الداخلي الذي الحيادي فيه صفر للقانون الداخلي الذي الحيادي فيه 1 يكون

$$1 = (2)^n.(3)^m.(5)^t.(7)^k$$

وكون التحليل في $\mathbb{Z}$ وحيد فالأسس المتقابلة متساوية $n = m = t = k = 0$

$$n, m, t, k \in \mathbb{Z}$$

وحسب تعريف المودول الحر اذا كانت L منتهي التوليد ووجدت له قاعدة منتهية فيكون المودول حر.

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو الثوت – شهد الحايك البوشي

Syria Math Team