

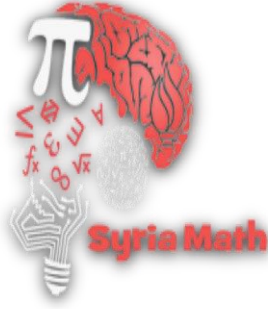
21-11-2017

نظري

◀ دكتور المادة: مريم القمحة

function : عنوان المحاضرة

◀ المحاضرة : الثانية عشر



بعد أن أنهينا الفصل الثاني سنبدأ بالفصل الثالث من مقرنا و هو (التوابع)

بعض المفردات هامة لفهم النص

Distinct	مختلف	At mostx	على الأكثر
Entire	كامل	At least	على الأقل
inverse	عكسي	Indexed	مرقمة
criterion	معيار	indices	أدلة – أرقام
cardinality	قدرة	Introduce	نقدم
obvious	واضح	Uncountable	غير قابلة للعد
terminology	مصطلح	Denumerable or countable	قابلة للعد
invertible	عكوس		

### ONE-TO-ONE, ONTO AND INVERTIBLE FUNCTIONS (هامة)

A function  $f: A \rightarrow B$  is said to be one-to-one (Written 1-1) if different elements in the domain  $A$  have distinct images. Another way of saying the same thing is that  $f$  is one-to-one if  $f(a)=f(a')$  implies  $a=a'$ .

A function  $f: A \rightarrow B$  is said to be an onto function if each element of  $B$  is the image of some element of  $A$ . in other words,  $f: A \rightarrow B$  is onto if the image of  $f$  is the entire codomain, i.e. if  $f(A)=B$ . In such a case we say that  $f$  is a function from  $A$  onto  $B$  or that  $f$  maps  $A$  onto  $B$ .

A function  $f: A \rightarrow B$  is invertible if its inverse relation  $f^{-1}$  is a function from  $B$  to  $A$

In general, the inverse relation  $f^{-1}$  is not a function. The following theorem is a simple criterion which tells us when it is.

**Theorem:** A function  $f: A \rightarrow B$  is invertible if and only if  $f$  is both one-to-one and onto>

If  $f: A \rightarrow B$  is one-to-one and onto, then  $f$  is called one to one correspondence between  $A$  and  $B$  this terminology comes from the fact that each element of  $A$  will then correspond to a unique element of  $B$  and vice versa.

Some texts use the term injective for a one-to-one function , surjective for an onto function , and bijective for a one – to –one correspondence.

Since functions may be identified with their graphs , and since graphs may be plotted, we might wonder whether the concepts of being one – to –one and onto have geometrical meaning . we show that the answer is yes.

To say that a function  $f: A \rightarrow B$  is one-to-one means that there are no two distinct pairs  $(a_1, b)$  and  $(a_2, b)$  in the graph of  $f$ ; hence each horizontal line can intersect the graph of  $f$  in a most one point . On the other hand ,to say that  $f$  is an onto function means that for every  $b \in B$  there must be at least one  $a \in A$  such that  $(a,b)$  belongs to the graph of  $f$ ; hence each horizontal line must intersect the graph of  $f$  at least once. Accordingly, if  $f$  is both one – to – one and onto , i.e invertible , then each horizontal line will intersect the graph of  $f$  exactly one point.

### INDEXED CLASSES OF SETS

We next define a special kind of function , called an indexing function , let  $I$  be any nonempty set ,and let  $S$  be a class of sets. An indexing function from  $I$  to  $S$  is a function  $f: I \rightarrow S$  For any  $i \in I$  , we denote the image  $f(i)$  by  $A_i$  . Thus the indexing function  $f$  is usually denoted by

$$\{A_i : i \in I\} \text{ or } \{A_i\}_{i \in I} \text{ or simply } \{A_i\}$$

The set  $I$  is called the indexing set , and the elements of  $I$  are called indices . If  $f$  is one – to-one and onto , we say that  $S$  is indexed by  $I$  .

### CARDINALTY

Two sets  $A$  and  $B$  are said to have the same cardinality if there exists a one-to-one correspondence  $f: A \rightarrow B$ . A set  $A$  is finite if  $A$  is empty or if  $A$  has the same cardinality as the set  $\{1,2,3,\dots,n\}$  for some positive integer  $n$ . A set is infinite if it is not finite .

Familiar examples of infinite sets are the natural numbers  $N$  , the integers  $Z$ , the rational numbers  $Q$  and the real numbers  $R$ .

We now introduce the idea of " cardinal numbers" . We will consider cardinal numbers simply as symbols assigned to sets in such a way that two sets are assigned the same symbol if and only if they have the same cardinality . the cardinal number of a set  $A$  is commonly denoted by

$$|A|, n(A), \#(A), \text{ or } \text{card}(A)$$

We will use  $|A|$ .



We use the obvious symbols for the cardinal numbers of finite sets. That is , 0 is assigned to the empty set  $\emptyset$  , and n is assigned to the set  $\{ 1,2,\dots,n\}$ . Thus  $|A|=n$  if and only if A has the same cardinality as  $\{1,2,\dots,n\}$  which implies that A has n elements .

**Theorem 3.2:**

A countable union of countable sets is countable .

In other words , if  $A_1, A_2, \dots$  are each countable sets then the union  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  is also a countable set.

An important example of an infinite set which is uncountable , i.e not countable , is given by the following theorem.

**Theorem 3.3:** The set I of all real number between 0 and 1 is uncountable.

**الترجمة :**

**الدوال المتباينة و الغامرة و العكوسة**

- يقال عن الدالة  $f: A \rightarrow B$  إنها متباينة "و تكتب ١-١" إذا كانت العناصر المختلفة من المنطلق A لها صور مختلفة .
- طريقة أخرى لنقول الشيء نفسه أن f هي "متباينة" إذا كان  $f(a) = f(a')$  يحقق  $a=a'$  .
- نقول عن الدالة  $f: A \rightarrow B$  إنها دالة غامرة إذا كان كل عنصر من B هو صورة لعنصر من A .
- بعبارة أخرى ، لدالة  $f: A \rightarrow B$  هي دالة غامرة إذا كانت صورة f هي كامل المستقر ، أي إذا كانت  $f(A) = B$  .
- في مثل هذه الحالة نقول عن f إنها دالة غامرة من A إلى B أو أن f تصور (تربط) A غمراً إلى B .
- نقول عن الدالة  $f: A \rightarrow B$  إنها عكسية (عكوسة) إذا كانت علاقتها العكسية  $f^{-1}$  هي دالة من B إلى A .
- بشكل عام ، العلاقة العكسية  $f^{-1}$  ليست دالة . المبرهنة التالية هي معيار بسيط يدلنا عليها .

**نظرية:**

- تكون الدالة  $f: A \rightarrow B$  عكوسة (عكسية) إذا و فقط إذا كانت f متباينة و غامرة بأن معاً .
- إذا كانت  $f: A \rightarrow B$  متباينة و غامرة عندها تدعى "تقابل متباين" من A إلى B .
- يأتي هذا المصطلح من حقيقة أن كل عنصر من A سيقابل عنصر وحيد من B و العكس صحيح.
- يستخدم بعض النصوص المصطلح "علاقة تباين" من أجل الدوال المتباينة و مصطلح "علاقة غمر" من أجل الدوال الغامرة و المصطلح "تقابل متباين" من أجل الدوال المتباينة .



-بما أنه يمكن تحديد (تعريف) الدوال بالتمثيل البياني و لأن التمثيل البياني يمكن رسمه ، لربما نتساءل فيما إذا كانت مفاهيم الدوال المتباينة و الغامرة لها معنى هندسي أم لا . سنرى أن الجواب هو نعم .

-من أجل أن نقول أن الدالة  $f: A \rightarrow B$  متباينة يعني أنه ليس هنالك زوجين مختلفين  $(a_1, b)$  و  $(a_2, b)$  في المخطط البياني لـ  $f$  ، و بالتالي كل خط أفقي يمكن أن يقطع بيان الدالة  $f$  بنقطة واحدة على الأكثر .

-من ناحية أخرى ، من أجل كل  $b \in B$  فإنه لا بد أن يكون هنالك على الأقل عنصر واحد  $a \in A$  حيث أن  $(a, b)$  ينتمي لبيان  $f$  . و بالتالي كل خط أفقي يجب أن يقطع بيان  $f$  على الأقل مرة واحدة .

-إذاً ، إذا كانت الدالة  $f$  متباينة و غامرة معاً ، أي أنها عكسية (عكوسة) ، عندها كل خط أفقي سيتقاطع مع بيان  $f$  بنقطة واحدة فقط .

### صفوف المجموعات ذات الدليل (دليل صفوف المجموعات) :

-نعرف فيما يلي نوع خاص من الدوال ، و يدعى الدالة ذات الدليل .

لتكن  $I$  مجموعة غير خالية ، و لتكن  $S$  صفاً من المجموعات . الدالة ذات الدليل من  $I$  إلى  $S$  هي الدالة  $f: I \rightarrow S$  من أجل كل  $i \in I$  و نرمز الصورة  $A_i \rightarrow f(i)$

-و بالتالي الدالة  $f$  ذات الدليل تعرف كما يلي :

$$\{A_i\}_{i \in I} \text{ أو } \{A_i: i \in I\} \text{ أو ببساطة } \{A_i\}$$

لتكن المجموعة  $I$  المجموعة ذات الدليل و تدعى العناصر في  $I$  بالأدلة ، إذا كانت  $f$  متباينة نقول أن  $S$  مرقمة بـ  $I$ .

### القدرة :

-يقال عن المجموعتان  $A$  و  $B$  أنهما تمتلكان نفس القدرة إذا كان يوجد تقابل متباين  $f: A \rightarrow B$

و تكون المجموعة  $A$  منتهية إذا كانت خالية أو إذا كان لـ  $A$  نفس القدرة للمجموعة  $\{1,2,3,\dots,n\}$  من أجل أي عدد صحيح موجب  $n$  .

-تكون المجموعة غير منتهية إذا لم تكن منتهية .

أمثلة شهيرة عن المجموعات غير المنتهية هي الأعداد الطبيعية  $N$  و الأعداد الصحيحة  $Z$  و الأعداد العادية (النسبية)  $Q$  و الأعداد الحقيقية  $R$  .

-نقدم الآن فكرة " الأعداد ذات القدرة " . سنعبر عن أعداد القدرة (الأعداد ذات القدرة) ببساطة على أنها رموز تستند للمجموعات بحيث أننا نسند المجموعتين لنفس الرمز إذا و فقط إذا كان لهما نفس القدرة .

-الرمز الشائع للأعداد ذات القدرة للمجموعة  $A$  هو كالتالي :

$$|A|, n(A), \#A, \text{card } A$$

سوف نستخدم الرمز  $|A|$  .

سوف نستخدم الرموز الواضحة من أجل قدرة الأعداد للمجموعات المنتهية هذا يعني أن الـ 0 يتم اسناده إلى المجموعة الخالية  $\emptyset$  و  $n$  يتم اسناده للمجموعة  $\{1,2,3,\dots,n\}$  و منه  $|A|=n$  إذا فقط إذا كانت  $A$  لها نفس قدرة الـ  $\{1,2,3,\dots,n\}$  و التي تعطي أن  $A$  تحوي  $n$  عنصراً .

### نظرية :

الاجتماع المعدود لمجموعات العدودة يكون معدوداً ، بمعنى آخر ، إذا كانت  $A_1, A_2, \dots$  كل منها مجموعات معدودة ، عندها يكون الاجتماع  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  يكون أيضاً مجموعة منتهية .

يوجد مثال مهم للمجموعات غير المنتهية و التي تكون غير معدودة ، أي غير معدودة ، ستعطي في النظرية التالية :

نظرية :

المجموعة  $I$  من كل الأعداد الحقيقية بين 0 و 1 و تكون غير معدودة

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي - نذير تيناوي