◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الخامسة عشرة   عنوان المحاضرة: مركز التسارع المعدوم

سندرس أصدقائي في هذه المحاضرة مركز التسارع المعدوم مع بعض المسائل ..

مركز التسارع المعدوم

نسمي النقطة (Q) من المستوي المتحرك التي ينعدم تسارعها في لحظة ما (t) بالنسبة للجملة الثابتة **بالمركز الآني للتسارع المعدوم** . ينتج من التعريف أن النقطة (Q) تحقق العلاقة $\vec{\Gamma}(Q)=\vec{0}$ أي :

$$\vec{\Gamma}(Q)=\vec{\Gamma}(o)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oQ}-\omega^2\overrightarrow{oQ}=\vec{0}$$

إذا اخترنا (Q) قطب للحركة في الحظة المذكورة فإننا نكتب عبارة التسارع للنقطة (M) من المستوي المتحرك بالعلاقة :

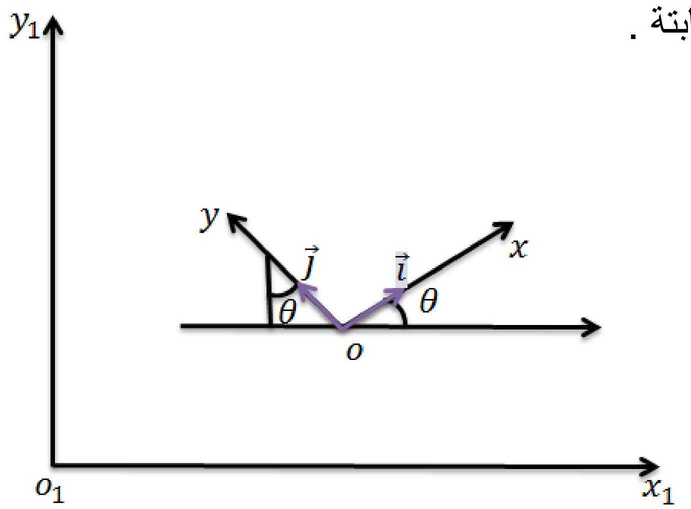
$$\vec{\Gamma}(M)=\vec{\Gamma}(Q)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{QM}-\omega^2\overrightarrow{QM}$$
$$\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{QM}-\omega^2\overrightarrow{QM}$$

أي أن تسارع أي نقطة (M) من المستوي المتحرك في هذه اللحظة **هو عبارة عن تسارع دوراني** حول النقطة (Q) الأمر الذي دعانا إلى تسميتها **بالمركز الآني للتسارع** .

ملاحظة :

إن المركز الآني للدوران (I) لا ينطبق في الحالة العامة على المركز الآني للتسارع المعدوم وإن انطبقت النقطتان تصبح الحركة دورانية حول نقطة ثابتة .

الدراسة التحليلية للحركة المستوية



تعيين الموضع نختار $(o_1x_1y_1)$ جملة محاور احداثية في المستوي الثابت و(oxy) جملة محاور احداثية في المستوي المتماسك (المتحرك) مع الجسم ، بحيث نختار مبدأ الاحداثيات (o) قطب للحركة وتكون (θ) الزاوية بين (ox) مع منحى (o_1x_1) إن للحركة كما نعلم ثلاث درجات حرية فهي تتعين بثلاث وسطاء مستقلة وهي (x_0,y_0,θ) وتكون معادلات الحركة هي :

$$\theta_0=\theta_0(t)\quad,\quad x_0=x_0(t)\quad,\quad y_0=y_0(t)$$

ومنه يتعين موضع النقطة M من المستوي المتحرك تحليلياً من اسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$
$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0) + x(\cos\theta\,\vec{\imath_1} + \sin\theta\,\vec{\jmath_1}) + y(-\sin\theta\,\vec{\imath_1} + \cos\theta\,\vec{\jmath_1})$$

بالإسقاط نجد :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y_1 = y_0 + x.\sin\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$
وهي مركبات M على الجملة الثابتة

تعيين سرعة النقطة (M) :

إما عن طريق الاشتقاق المباشر للجملة الثابتة

$$\vec{v}(M) = \begin{cases} x_1' = x_0' - x\sin\theta\,.\theta' - y\cos\theta.\theta' \\ y_1' = y_0' + x\,\cos\theta.\theta' - y\sin\theta.\theta' \end{cases}$$

أو من العلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

في الجملة الثابتة

$$\vec{v}(M) = (x_0', y_0') + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

في الجملة المتماسكة يكون قطب الحركة في المبدأ وتنطبق على الجملة الثابتة في بداية الحركة أي :

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\vec{v}(M) = \left(V_x(0), V_y(0)\right) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x - 0 & y - 0 & 0 \end{vmatrix}$$

تعيين تسارع النقطة (M)

إما عن طريق الاشتقاق المباشر لسرعة $\vec{v}(M)$

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_1'', y_1'')$$

أو عن طريق العبارة التالية :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM} - \omega^2\overrightarrow{oM}$$

في الجملة الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_0'', y_0'') + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} - \omega^2(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

في الجملة المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \left(\Gamma_x(0), \Gamma_y(0)\right) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2(x, y, z)$$

تعيين المركز الآني للدوران تحليلياً

بفرض (o) قطب الحركة و (I) المركز الآني للدوران فإن سرعة القطب تعطى كما يلي :

$$\vec{v}(\mathrm{o}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io}$$

نضرب طرفي هذه العلاقة خارجياً بـ $\vec{\omega}$ ((شعاع الدوران الآني)) فنجد :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io}\right)$$

باستخدام علاقة جيبس نجد :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = -\omega^2 \overrightarrow{Io}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = \omega^2 \overrightarrow{oI}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{oI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o)}{\omega^2}$$

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران $I(X_1, Y_1)$, $o(x_0, y_0)$

على الجملة الثابتة نجد :

$$\overrightarrow{oI} = (X_1 - x_0, Y_1 - y_0) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{\imath}_1 & \vec{\jmath}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0' & y_0' & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 - x_0 = -\frac{y_0'.\omega}{\omega^2} = -\frac{y_0'}{\omega} \Longrightarrow X_1 = x_0 - \frac{y_0'}{\omega} \ldots (1)$$

$$Y_1 - y_0 = \frac{x_0'.\omega}{\omega^2} = \frac{x_0'}{\omega} \quad \Longrightarrow Y_1 = y_0 + \frac{x_0'}{\omega} \ldots (2)$$

المعادلين (1) و (2) هما المعادلتين الوسيطيتين للقاعدة .

على الجملة المتماسكة نجد :

لكن بحيث $I(X_I, Y_I)$ و $o(0,0)$ ومنه :

$$\overrightarrow{oI} = (X_I - 0, Y_I - 0) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x(o) & v_y(o) & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_I = -\frac{v_y(o).\omega}{\omega^2} \Longrightarrow X_I = -\frac{v_y(o)}{\omega} \ldots (1)$$

$$Y_I = \frac{v_x(o).\omega}{\omega^2} \Longrightarrow Y_I = \frac{v_x(o)}{\omega} \ldots (2)$$

المعادلين (1) و (2) هما المعادلتين الوسيطيتين للمتدحرج .

مثال ((الدورة التكميلية في 2014-2015))

صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين oAB قائم الزاوية في (A) طول ضلعه القائم يساوي (2)

والمطلوب:

أولاً- بفرض أن الصفيحة تدور حول رأسها الثابت (o) بحيث يبقى ضلعها (oA) ملازما للمستوي الثابت (ox_1y_1) المطلوب :

(1 عين شعاع الدوران الآني في الجملة المتماسكة

(2 عين معادلات حركة الصفيحة وسرعة الرأس (B) من الصفيحة وذلك بفرض أن $|\vec{v}(A)| = 2$ و $|\vec{\omega}| = 2$.

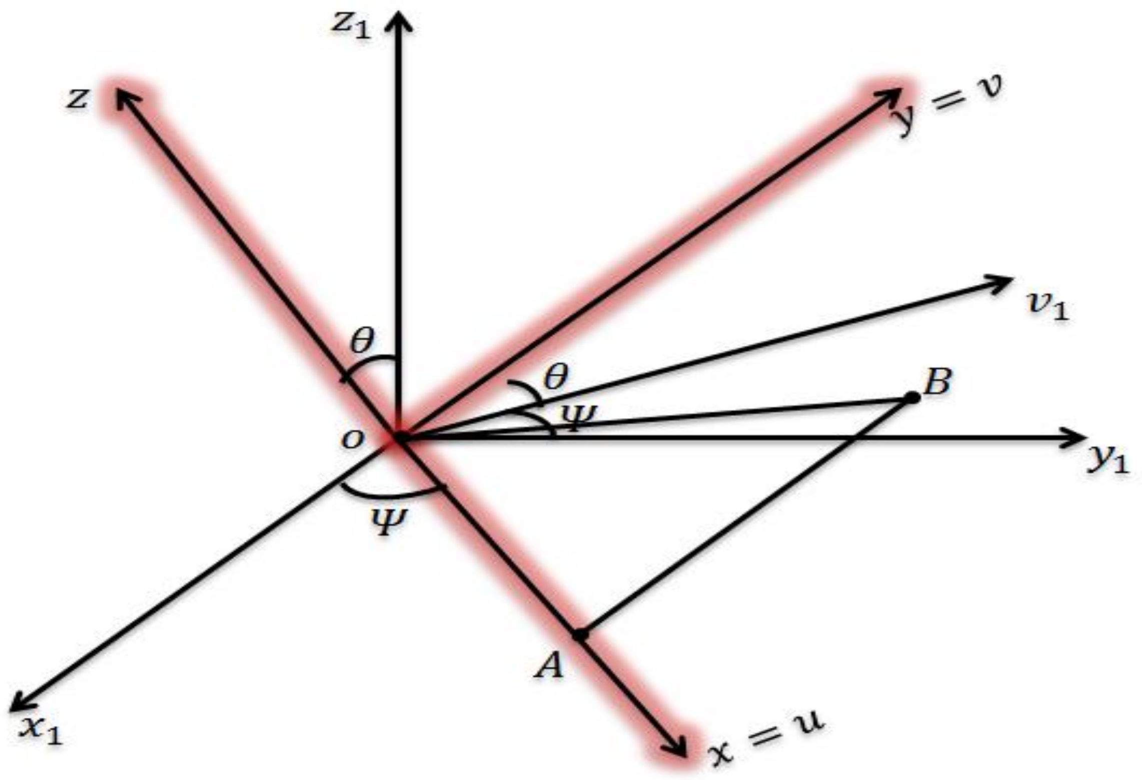
ثانياً- تدور الصفيحة في المستوي (ox_1y_1) حول رأسها (o) بسرعة زاوية $(\omega = 2t)$ وبحيث يتحرك رأسها (o) على (o_1x_1) بسرعة ثابتة $(\vec{v})$, عين معادلات الحركة وشعاع سرعة الرأس (B) في الجملة الثابتة .

الحل :

أولاً :

إن المثلث oAB متساوي الساقين وقائم في A ومنه فإن $oA = AB = 2$ وحسب فيثاغورس فإن $oB^2 = 8$ أي $oB = 2\sqrt{2}$ وبالتالي: $A(2,0,0), B(2,2,0)$ وبما أن oA سيبقى ملازماً للمستوي الثابت (ox_1y_1) فإن الدوران الثالث لا يتم ومنه

$$(\hat{\varphi} = 0) \text{ و } (\vec{u} = \vec{x}) \text{ و } (\vec{v} = \vec{y})$$



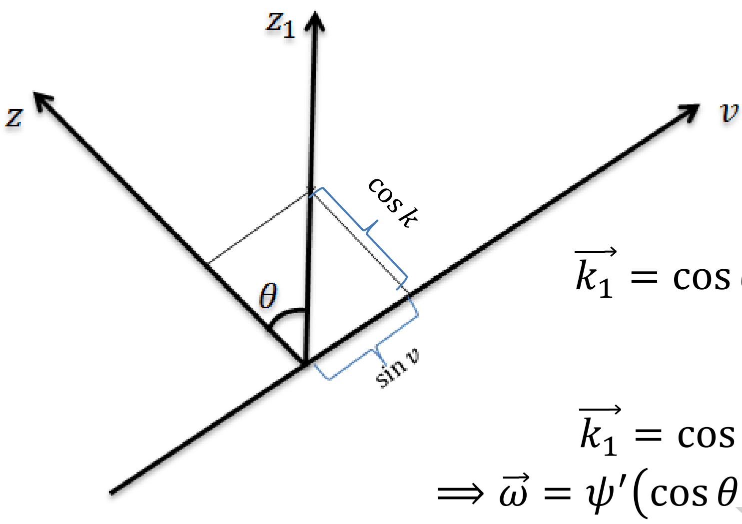
1) يعطى شعاع الدوران الآني بالعلاقة :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

حيث $(\hat{\varphi}, \hat{\theta}, \hat{\psi})$ زوايا أولر و $\varphi = 0$ و $\vec{u} = \vec{\imath}$ ومنه نجد :

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{\imath}$$

ولتعيين $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة نسقط $\overrightarrow{k_1}$ على المحاور المتماسكة أو بالاستعانة بمصفوفات التحويل فنجد :



$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{v}$$

ولدينا $\vec{v} = \vec{\jmath}$ ومنه نجد :

$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi'\left(\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right) + \theta'\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \psi'\sin\theta\,\vec{\jmath} + \psi'\cos\theta\,\vec{k}$$

2) نعلم أن وسطاء الحركة هي زوايا أولر $(\hat{\varphi}, \hat{\theta}, \hat{\psi})$ ولدينا $\hat{\varphi} = 0$ ولنوجد كل من θ, ψ من الفرض لدينا $|\vec{v}(A)| = 2$ ومنه من علاقة سرعة A نجد :

$$\vec{v}(\mathrm{A}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \theta' & \psi'.\sin\theta & \psi'.\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\mathrm{A}) = 2\psi'.\cos\theta\,\vec{\jmath} - 2\psi'\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow 2 = |\vec{v}(\mathrm{A})| = \sqrt{4\psi'^2.\cos^2\theta + 4\psi'^2\sin^2\theta} = \sqrt{4\psi'^2} = 2\psi'$$

$$\Rightarrow \psi' = 1 \Rightarrow \psi = \int 1.dt \Rightarrow \psi = t + c$$

عندما $\psi = 0$ وفي اللحظة الزمنية $t = 0$ ومنه $c = 0$ فنجد :

$$\boxed{\Rightarrow \psi = t}$$

نعوض في شعاع الدوران :

$$\vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

وايضاً لدينا من الفرض $|\vec{\omega}| = 2$ ومنه :

$$2 = |\vec{\omega}| = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta + \cos^2\theta} \Rightarrow |\vec{\omega}| = \sqrt{\theta'^2 + 1}$$

$$\theta'^2 + 1 = 4 \Rightarrow \theta' = \pm\sqrt{3}$$

وبما اننا نريد الدوران فنأخذ القيمة الموجبة لـ θ' أي $\theta' = \sqrt{3}$ ومنه :

$$\theta = \int \sqrt{3}\,.dt \Rightarrow \theta = \sqrt{3}.t + c_1$$

عندما $\theta = 0$ وفي اللحظة الزمنية $t = 0$ ومنه $c_1 = 0$ فنجد :

$$\boxed{\Rightarrow \theta = \sqrt{3}.t}$$

ومنه معادلات حركة الصفيحة هي :

$$\boxed{\psi = t \quad , \quad \theta = \sqrt{3}.t \quad , \quad \varphi = 0}$$

إن سرعة الرأس B تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3} & \sin\sqrt{3}\,t & \cos\sqrt{3}\,t \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

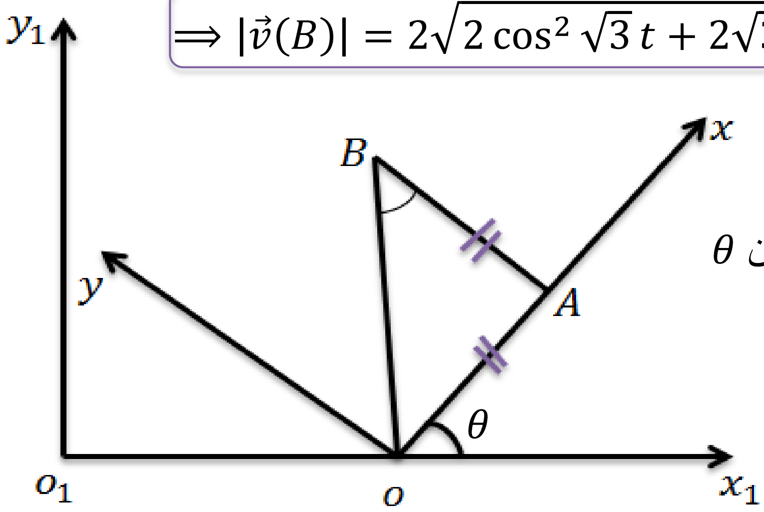
$$\Rightarrow \vec{v}(B) = -2\cos\sqrt{3}\,t.\vec{i} + 2\cos\sqrt{3}\,t.\vec{j} + (2\sqrt{3} - 2\sin\sqrt{3}\,t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(B)| = \sqrt{(-2\cos\sqrt{3}\,t)^2 + (2\cos\sqrt{3}\,t)^2 + (2\sqrt{3} - 2\sin\sqrt{3}\,t)^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(B)| = \sqrt{8\cos^2\sqrt{3}\,t + 12 + 8\sqrt{3}.\sin\sqrt{3}\,t + 4.\sin^2\sqrt{3}t}$$

$$\boxed{\Rightarrow |\vec{v}(B)| = 2\sqrt{2\cos^2\sqrt{3}\,t + 2\sqrt{3}.\sin\sqrt{3}\,t + 3 + \sin^2\sqrt{3}t}}$$

ثانياً :



نلاحظ أن حركة الصفيحة هي حركة مستوية
وبالتالي لدينا ثلاث معادلات للحركة
هي احداثيي القطب $o(x_0, y_0)$ وزاوية الدوران θ
الواقعة بين المحور الافقي ox_1 والضلع oA
وضوحاً لدينا $y_0 = 0$ ولنعين (θ) و (x_0)

ولدينا فرضاً ما يلي :

$$\Rightarrow |\vec{v}(o)| = v \Rightarrow \sqrt{v_x^2(o) + v_y^2(o)} = v \Rightarrow v_x(o) = v$$

$$\boxed{\Rightarrow x_0 = vt \quad , \quad y_0 = 0}$$

$$\theta' = \omega \Rightarrow \theta = \int 2t\,.dt \Rightarrow \theta = t^2 + c$$

بحيث $(\theta = 0\,, t = 0)$ ومنه $c = 0$ فنجد :

$$\boxed{\Rightarrow \theta = t^2}$$

لكي نعيين سرعة B في المتماسكة نعين احداثياتها في المتماسكة ، وبما أن المثلث قائم ومتساوي الساقين طول ضلعه القائم يساوي 2 نقوم بما يلي :

نختار جملة الاحداثيات المتماسكة مع الصفيحة oxy بحيث مبدؤها القطب o والمحور ox منطبق على الضلع oA من الصفيحة والمحور oy يعامد المحور ox
وبالتالي نلاحظ من الرسم أن $(y_B = AB)$ و $(x_B = oA = 2)$ وبالتالي شعاع الموضع للنقطة B في الجملة المتماسكة هو :

$$\overrightarrow{oB} = (x_B - x_0, y_B - y_0) = (2-0, 2-0) \Longrightarrow \overrightarrow{oB} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

يعطى شعاع التسارع للنقطة B في الجملة المتماسكة بالعلاقة :

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oB} \Longrightarrow \vec{v}(B) = (v, 0) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2t \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) = (v, 0) + (-4t, 4t, 0)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \vec{v}(B) = (v - 4t)\vec{\imath} + 4t.\vec{\jmath}}$$

مسألة " وظيفة"

ليكن (AB) قضيب طوله (2ℓ) يتحرك في المستوي الثابت (x_1y_1) بحيث تنزلق النقطة (A) من القضيب على (o_1x_1) بسرعة ثابتة قيمتها (v) وتتحرك النهاية (B) منه في المستوي (x_1y_1) بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة $v(B) = v$, كان القضيب في لحظة البدء منطبقا على (o_1y_1) **والمطلوب** :

1- عين معادلات الحركة
2- أوجد مسار النقطة (B)
3- عين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران **((تحليلياً))**
4- عين المركز الآني للدوران **((هندسياً))**
5- أوجد تسارع النقطة (B)
6- أوجد مركز التسارع المعدوم .
7- عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة .

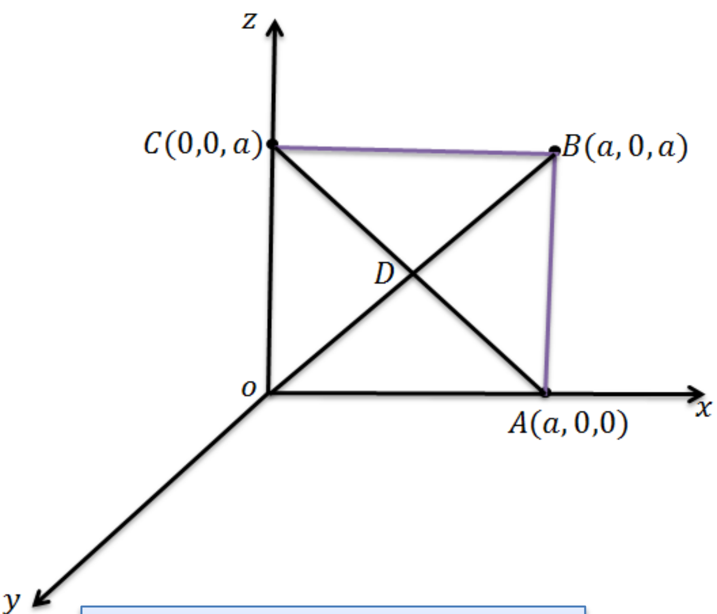
" تمرين من المحاضرة السادسة لم تحله الدكتورة "

لتكن $(oABC)$ صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها (a) فيها o, C نقطتان ثابتتان, النقطة (A) ترسم دائرة بسرعة زاوية $(\vec{\omega})$ ، **والمطلوب** :
أوجد مسار مركز الصفيحة الهندسي وسرعته وليكن مركز الصفيحة (D)

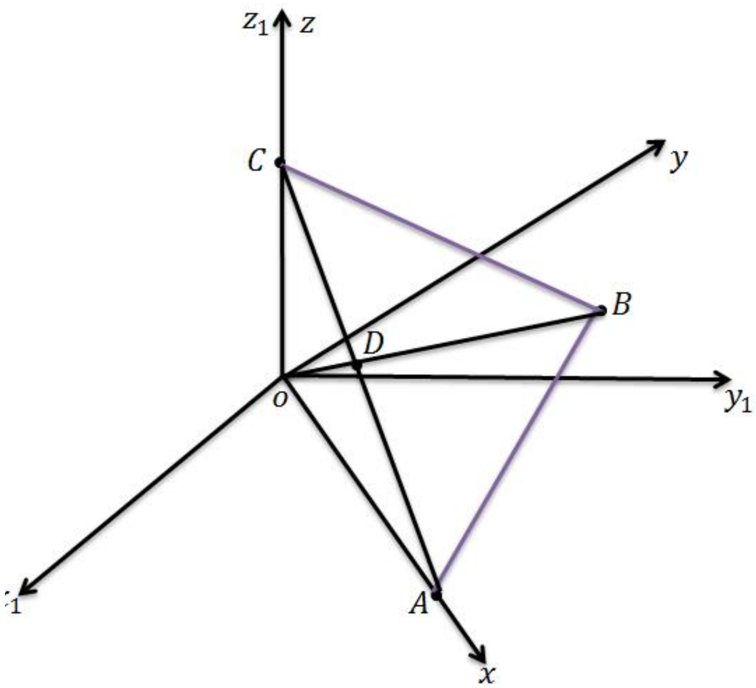
الحل :

نستنتج من عبارة (A) ترسم دائرة بسرعة $(\vec{\omega})$ أن الحركة دورانية ، وبما أن o, C نقطتان ثابتتان فهي عبارة عن المحور الثابت وبالتالي الحركة دورانية حول محور ثابت
نأخذ المحاور الإحداثية ، $(o_1x_1y_1z_1)$ جملة محاور ثابتة ينطبق المحور (oz_1)

وَ (oz) على محور الدوران (Δ) و $(oxyz)$
جملة محاور متماسكة مع الصفيحة .بفرض (o) نقطة مبدأ الإحداثيات
بما أن (D) مركز الصفيحة ومنه $D \in S$ بحيث (S)
جسم صلب متماسك مع جملة الإحداثيات المتحركة (الصفيحة)



الرسم على الجملة المتماسكة



الرسم على الجملة المتماسكة والثابتة

إن (D) تقع في منتصف القطر $(\overrightarrow{oB})$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{oB} = a\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + a\vec{k} \implies \overrightarrow{oD} = \frac{a}{2}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + \frac{a}{2}\vec{k}$$

شعاع زاوية الدوران $\vec{\omega}(0,0,\theta')$

احداثيات (D) على الجملة المتماسكة

$$x_D = \frac{a}{2} \quad , \qquad y_D = 0 \quad , \qquad z_D = \frac{a}{2}$$

تذكرة : للتحويل من الجملة المتماسكة الى الثابتة نستخدم التحويلات التالية :

$$\vec{\imath} = cos\theta\overrightarrow{\imath_1} + sin\theta\overrightarrow{\jmath_1}$$
$$\vec{\jmath} = -\sin\theta\overrightarrow{\imath_1} + cos\theta\overrightarrow{\jmath_1}$$
$$\vec{k} = \overrightarrow{k_1}$$

بإسقاط الشعاع $\overrightarrow{oD}$ على الجملة الثابتة نجد :

$$\overrightarrow{oD} = \frac{a}{2}cos\theta\overrightarrow{\imath_1} + \frac{a}{2}sin\theta\overrightarrow{\jmath_1} + \frac{a}{2}\vec{k}$$

احداثيات النقطة (D) على الجملة الثابتة

$$x_{1D} = \frac{a}{2}cos\,\theta \quad , \quad y_{1D} = \frac{a}{2}sin\,\theta \quad , \quad z_{1D} = \frac{a}{2}$$

سرعة D في الجملة الثابتة :

$$\vec{v}(D)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oD}\Longrightarrow\vec{v}(D)=\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \theta'\\ \frac{a}{2}\cos\theta & \frac{a}{2}\sin\theta & \frac{a}{2}\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \vec{v}(D)=-\frac{a}{2}\theta'\sin\theta\,\vec{\imath_1}+\frac{a}{2}\theta'\cos\theta\,\vec{\jmath_1}}$$

نعتذر عن ورود خطأ في المحاضرة السادسة الصحفة 2

الخطأ :

نسقط (M) على المستوي $(o_1x_1y_1)$ وليكن المسقط (m_1)
ونسقط (M) على المحور (o_1z_1) وليكن المسقط (m_2)
ومنه: $\vec{v}(M)=\vec{v}(m_1)+\vec{v}(m_2)$
وبما أن حركة (m_1) في المستوي هي حركة دائرية $M(x,y,z)$

الصواب:

نسقط (M) على المستوي $(o_1x_1y_1)$ وليكن المسقط (m_2)
ونسقط (M) على المحور (o_1z_1) وليكن المسقط (m_1)
ومنه: $\vec{v}(M)=\vec{v}(m_1)+\vec{v}(m_2)$
وبما أن حركة (m_2) في المستوي هي حركة دائرية $M(x,y,z)$

انتهت المحاضرة

وَأحلى الهَوَى ما شكَ في الوَصْلِ رَبُّهُ
وَفي الهجرِ فهوَ الدّهرَ يَرْجو وَيَتّقي ....

إعداد: محمد علي فليون ** لمى حبشية