◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الحادية عشرة   عنوان المحاضرة : دراسة المتغيرات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تعريف المتغير العشوائي .

2- دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل .

3- بعض الملاحظات والأمثلة .

الفصل الثالث : دراسة المتغيرات العشوائية

تعريف المتغير العشوائي :

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً , إنَّ الدالة $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ تدعى متغيراً عشوائياً إذا حققت الشرط :

$$\forall B \subseteq \mathbb{R} : X^{-1}(B) \in F$$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وفق X هي حدث من F في Ω .

لكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمز لها بـ $\mathbb{R}_X$.

ملاحظات

1) إذا كان فضاء العينة Ω منتهياً أو غير منته ٍ لكنه قابل للعد فنقول عن هذا الفضاء إنه فضاء منقطعاً (منفصلاً) والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً منقطعاً . ((حجر النرد))

$$\mathbb{R}_X = \{1,2,3,4,5,6\} \, , \mathbb{R}_X = \{1,2,3, \dots\}$$

2) إذا كان فضاء العينة غير منته ٍ وغير قابل للعد فندعوه فضاءً مستمراً (متصل) والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً عشوائياً مستمراً (متصلاً) **مثال :** عمر المصباح (لمبة)

$$\mathbb{R}_X = \{0,1\} \, , \mathbb{R}_X = \{0, +\infty\} \, , \mathbb{R}_X = \{150,210\}$$

3) كل فضاء منته هو قابل للعد لكن العكس غير صحيح بالضرورة

قابل للعد $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$, فضاء منتهي $w_1, w_2, \dots, w_n$

مثال تجربة رمي حجر نرد وظهور الرقم 6 $\Leftarrow$ $\Omega = \{1, \dots \dots, 6\}$ فضاء منتهي .

تجربة رمي حجر نرد حتى الحصول على الرقم 6 $\Leftarrow$ $\Omega = \{1,2,3, \dots \dots\}$ غير منته لكنه قابل للعد .

تذكير ببعض خواص الصورة العكسية

إذا كان $X: E \longrightarrow F$ تطبيقاً وكانت المجموعة $B \subseteq F$ فإنَّ :

$$X^{-1}(B) = \{x : x \in E , X(x) \in B\}$$

تدعى الصورة العكسية لـ X وفق ونرمز لها بـ : $[x \in B]$, ويكون : $X^{-1}(x) = [x = X]$

مثلاً :

X	-1	1
Ω	H	T

$[X = -1] = \{w \in \Omega : X(w) = -1\} = H$, $[X = 0] = \phi$

أي أنَّ : $P[X = -1] \Leftrightarrow P(H)$

أهم خواص هذه الصورة العكسية :

1) $[X \in \cup_i B_i] = \cup_i [X \in B_i]$
2) $[X \in \cap_i B_i] = \cap_i [X \in B_i]$
3) $[X \in B/A] = [X \in B]/[X \in A]$
4) $[X \in B'] = [X \in B]'$
5) $B \subseteq A \Rightarrow [X \in B] \subseteq [X \in A]$
6) $B \cap \mathbb{R}_X = \emptyset \Rightarrow [X \in B] = \emptyset$

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

1) دالة الكثافة الاحتمالية : ليكن X متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

إن مجموعة كل الأحداث الابتدائية (الأولية) w من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير العشوائي X القيمة $_i$

تشكل حدثاً نرمز له $[X = x_i]$ ونرمز لاحتمال الحدث بـ $P[X = x_i]$ حيث :

$$[X = x_i] = \{w; w \in \Omega \,, X(w) = x_i\}$$

عندئذ الدالة : $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ والتي من أجلها يكون : $f_X(x_i) = P[X = x_i]$ حيث :

$i = 1,2, \dots, n, \dots$ تدعى الدالة الاحتمالية لِ x, أو دالة الكثافة الاحتمالية لِ x وهي تحقق شرطين :

$$1 - \ \forall \, x_i \in \mathbb{R}_X : f_X(x_i) \geq 0 \ ; \ i = 1,2,3, \dots$$

$$2 - \sum_{i \geq 1} f_X(x_i) = \sum_{x_0 \in \mathbb{R}_X} f_X(x_0) = 1$$

وتوصف الدالة بالجدول :

X	x_1	x_2	…	x_n	…	المجموع
$f_X(x_i)$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	…	$f_X(x_n)$	…	1

مثال في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية , وليكن X المتغير الدال على عدد الصور الحاصلة , عين Ω ومجموعة قيم X ودالة الكثافة الاحتمالية لِ x ؟

الحل

فضاء العينة لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \{TTT, TTH, HTT, THT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

حيث نلاحظ أنَّ : $|\Omega| = 2^3 = 8$, ومجموعة قيم X هي : $\mathbb{R}_X = \{0,1,2,3\}$

وتكون دالة الكثافة لِ X توصف بالجدول :

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	المجموع
$f_X(x_i) = P[X = x_i]$	$P[X = 0] = f_X(0) = \frac{1}{8}$	$P[X = 1] = f_X(1) = \frac{3}{8}$	$P[X = 2] = f_X(2) = \frac{3}{8}$	$P[X = 3] = f_X(3) = \frac{1}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$

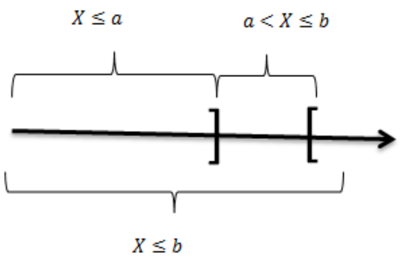
$$P[X = 0] = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8} \ , \ P[X = 1] = P(\{TTH, HTT, THT\}) = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 2] = P(\{THH, HTH, HHT\}) = \frac{3}{8} \ , \ P[X = 3] = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

2) **دالة التوزيع الاحتمالي :** ليكن X متغيراً منقطعاً معرفاً على (Ω, F, P) , إن الدالة المعرفة بالشكل :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = P(X \leq x)$$

تسمى بدالة التوزيع الاحتمالي F_X , للمتغير العشوائي X , وتكمن فائدة دالة التوزيع الاحتمالي في إمكانية حساب الاحتمالات لـ X التي لها الشكل :



$$P(a < X \leq b) = P([X \leq b]/[X \leq a])$$

حيث : a, b أعداد حقيقة

$$[X \leq a] \subseteq [X \leq b]$$

$$\Rightarrow P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

إذا كانت $F_X(x_i)$ دالة الكثافة الاحتمالية لـ X فإنَّ , دالة الكثافة الاحتمالية لـ X تحسب من العلاقة :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ F_X(x) = \textstyle\sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)}$$ حالة X منقطع

وبالتالي من أجل $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإنَّ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < x_1 \\ f(x_1) & ; x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & ; x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & ; x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 & ; x_n \leq x \end{cases}$$

مثال في المثال السابق نجد أنَّ :

$$= \begin{cases} 0 & ; x < x_1 = 0 \\ f(x_1) = f(0) = \frac{1}{8} & ; 0 \leq x < x_2 = 1 \\ f(x_1) + f(x_2) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} & ; 1 \leq x < x_3 = 2 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & ; 2 \leq x < x_4 = 3 \\ \text{مجموع الكل} = 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

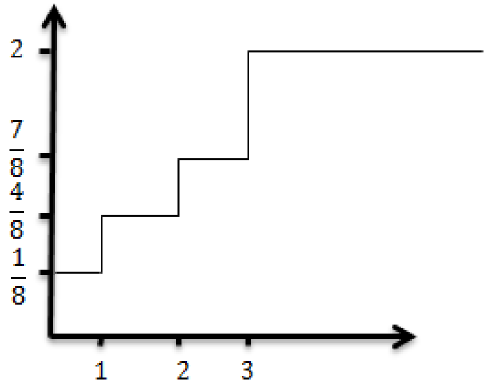
$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ; x<0 \\ \frac{1}{8} & ; 0\le x<1 \\ \frac{4}{8} & ; 1\le x<2 \\ \frac{7}{8} & ; 2\le x<3 \\ 1 & ; 3\le x \end{cases}$$

ويكون مثالاً :

$$F(2,5)=P(X\le 2,5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

$$F(4)=P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

ويكون لهذه الدالة F_X الشكل الدرجي التالي :



مثال ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$F_X(x)=\begin{cases} \frac{8}{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x=0,1,2,3 \\ 0 & ;\text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب : عيّن جدول الكثافة الاحتمالية لـ X , ودالة التوزيع الاحتمالي $F_X(x)$ واحسب $F(2.5)$.

الحل

إنَّ جدول الكثافة لـ X له الشكل :

X	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	$x_4=3$	المجموع
$F_X(x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

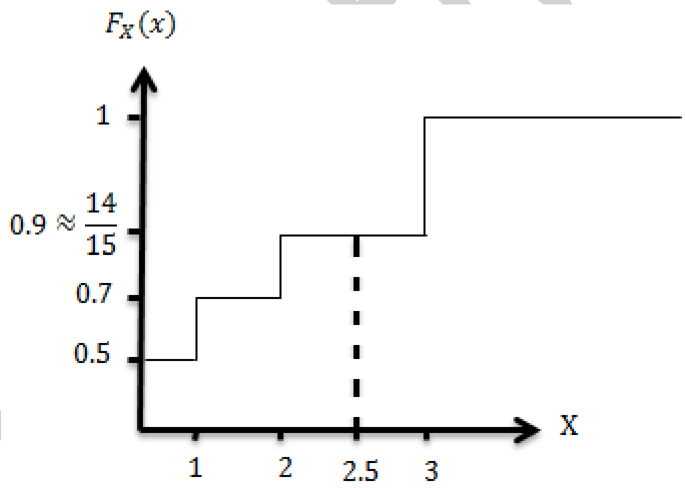
نلاحظ أنَّ : $\sum_{i=1}^{4} f_X(x_i)=1$ فتكون دالة التوزيع الاحتمالي لـ X لها الشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ f(x_1) = f(0) = \dfrac{8}{15} & ; 0 \le x < 1 \\ f(0) + f(1) = \dfrac{8}{15} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{12}{15} & ; 1 \le x < 2 \\ f(0) + f(1) + f(2) = \dfrac{14}{15} & ; 2 \le x < 3 \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 & ; 3 \le x \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(2.5) = P(X \le 2.5) = \frac{14}{15} = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\Rightarrow F(2.5) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$$

بهذه الدالة الشكل البياني الدرجي التالي :



انتهت المحاضرة

لن تحصل على غد أفضل ما
دمت تفكر بالأمس ...

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة