نظري

◄دكتور المادة: خليل تحيي

◄المحاضرة: الثالث عشرة ◄عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية من المرتبة n

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-التوابع المستقلة خطياً ومعين رونسكي.

2-تعريف لجملة الحلول الأساسية.

3-خمس مبرهنات.

التوابع المستقلة خطياً ومعين رونسكي

تعريف: نقول عن مجموعة التوابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ أنّها مستقلة خطياً في المجال $[a, b]$ إذا تحقق:

$$\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \cdots + \alpha_n . y_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ونقول عن هذه التوابع أنّها مرتبطة خطياً إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

مبرهنة (1):

إذا كانت التوابع: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ مرتبطة خطياً على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق من المرتبة $(n-1)$ فإنّ المعين:

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

يطابق الصفر على المجال $[a, b]$ نسمي هذا المعين (المحدد): معيّن رونسكي.

إذا كان معين رونكسي لا يطابق الصفر فإننا نقول أن مجموعة التوابع مستقلة خطيا .

وبما أنّ التوابع مرتبطة خطياً فإنّ: $\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \cdots + \alpha_n . y_n = 0 \ldots (1)$

أنّ الثوابت $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

وباشتقاق العلاقة (1) ل $(n-1)$ مرة متتالية :

$$\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \cdots + \alpha_n . y_n = 0$$

$$\alpha_1 . y_1' + \alpha_2 . y_2' + \cdots + \alpha_n . y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 . y_1^{n-1} + \alpha_2 . y_2^{n-1} + \cdots + \alpha_n . y_n^{n-1} = 0$$

وبالتالي هذه العلاقات تمثّل جملة معادلات جبرية متجانسة بالنسبة إلى $\alpha_i ; i = 1,2, \ldots , n$

وحسب الفرض فإنّها تقبل حلاً غير الحل الصفري لأجل كل قيمة ل x على المجال $[a,b]$ وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان معيّن الأمثال (رونسكي) يطابق الصفر.

نستنتج من المبرهنة السابقة:

أنّه إذا كانت جملة التوابع $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ وكان معين رونسكي لهذه التوابع لا يطابق الصفر فإنّ جملة التوابع تكون مستقلة خطياً.

مثال توضيحي: ليكن لدينا: $1 , x , x^2 , x^3$

فإنّ محدد الأمثال (معيّن رونسكي) يكون: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ أيّ أنّها مستقلة خطياً.

◄**تذكرة:** محدد المثال التوضيحي هو محدد مصفوفة مثلثية فقيمته تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

مبرهنة (2):

إذا كان التابع $y_1(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y^{(n)} + P_1(x).y^{(n-1)} + P_2.y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}.y' + P_n(x).y = 0 \ldots (1)$$

فإنّ $c.y_1$ هو أيضاً حلاً لها حيث c ثابت كيفي.

مبرهنة (3):

إذا كان التابعان: $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية (1)

فان حاصل جمع التابعان أيّ: $y_1 + y_2$ هو أيضا ً حل للمعادلة التفاضلية (1) .

نستنتج من المبرهنتين السابقتين (2) و(3):

أنّه إذا كان $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً للمعادلة التفاضلية (1) فإنّ التابع:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i.y_i = c_1.y_1 + \cdots + c_n.y_n$$

يكون حلاً لها أيضاً.

مبرهنة (4):

إذا كانت معاملات المعادلة الخطية (1): $P_i(x); i = 1,2, \ldots, n$ توابع حقيقية وإذا كانت المعادلة تقبل حلاً مركباً من الشكل: $y(x) = u(x) + i.v(x); i^2 = -1$ فإنّ كلاً من $u(x)$ الحقيقي و $v(x)$ التخيلي هو حلاً للمعادلة (1)

جملة الحلول الأساسية

تعريف: إذا كانت جملة التوابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية (1) وإذا كانت جملة التوابع مستقلة خطياً فندعوها جملة الحلول الأساسية للمعادلة التفاضلية (1).

مبرهنة (5): إذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جملة حلول أساسية للمعادلة (1) وإذا كانت المعاملات $P_i(x)$ توابع مستمرة على مجالها فإنّ محدد رونسكي $w(x) \neq 0$.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots (1)$$

إذا علمت أنّ لها حلولاً خاصة من الشكل: $y = e^{ax}$

الحل

$$y = e^{ax}\,, y' = a.e^{ax}\,, y'' = a^2.e^{ax}$$

والآن نعوض بالمعادلة (1) فنحصل على:

$$a^2.e^{ax} - 3a.e^{ax} + 2e^{ax} = 0 \Rightarrow e^{ax}(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$e^{ax} \neq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0$$

$$ei: a = 2, or: a = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$$

فإنّ محدد رونسكي يكون: $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$ فإنّ الحل العام من الشكل:

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 \Rightarrow y = c_1.e^x + c_2.e^{2x}$$

مثال: أوجد الحل العام:

$$(x-1).y'' - x.y' + y = 0 \dots (1)$$

علماً أنّ تقبل حلين خاصين من الشكل: $y_1 = x, y_2 = e^x$.

الحل

$$y_1 = x\,, y_1' = 1, y_1'' = 0 \xrightarrow{\text{نعوض ب1}} (x-1)0 - x(1) + x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$y_2 = e^x, y_2' = e^x, y_2'' = e^x \xrightarrow{\text{نعوض ب1}} (x-1)e^x - x.e^x + e^x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

فإنّ محدد رونسكي يكون: $\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} \neq 0$

ويكون الحل العام هو: $y = c_1.x + c_2.e^x$.

خفض مرتبة المعادلة الخطية

إذا كان y_1 حلاً خاصاً غير الصفر للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y^{(n)} + P_1(x).y^{(n-1)} + P_2.y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}.y' + P_n(x).y = 0 \ldots (1)$$

فإنّ التحويل من الشكل: $y \to u$ المعطى بالعلاقة:

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \boldsymbol{u} \underline{\quad \text{أو} \quad} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1}.\int \boldsymbol{u}.\boldsymbol{dx}$$

يخفض من مرتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة ويحافظ على خطية وتجانس المعادلة وبالتالي التحويل $y \to z$ يعطى بالشكل :

$$y = y_1.z$$

$$y' = y_1'.z + y_1.z'$$

$$\vdots$$

$$y^{(k)} = y_1.z^{(k)} + k.y_1'z' + \cdots + y_1^k.z$$

نلاحظ أنّ المشتق $y^{(k)}$ هو عبارة خطية في $z, z', \ldots, z^{(k)}$ وبالتالي نتيجة التبديل في (1) نحصل على معادلة تفاضلية خطية متجانسة بالنسبة ل $z, z', \ldots, z^{(k)}$ من الشكل:

$$y_1.z^{(k)} + q_1(x).z^{(k-1)} + \cdots + q_{n-1}(x).z' + q_n(x).z = 0$$

حيث: $q_n(x) = y_1^{(n)} + P_1(x).y_1^{(n-1)} + \cdots + P_n.y$

وبما أنّ y_1 حل خاص للمعادلة (1) فإنّ $q_n(x) = 0$ وتكون المعادلة من الشكل:

$$y_1(x).z^{(n)} + q_1(x).z^{(n-1)} + \cdots + q(x).z' = 0$$

وهي معادلة تفاضلية لا تحوي التابع z وتخفض مرتبتها بالتحويل $z' = u$.

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصرالله و ياسين الحليبي ورهف النقشي

دائما خذ الحياة ببساطة و بدون توقعات

☺ و لما بتفقد شيء إتذكر انك بتلاقي أجمل منو ☺