◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الحادية والثانية عشرون (والأخيرة)   عنوان المحاضرة: حل مسائل

سنقوم بهذه المحاضرة أصدقائي بحل بعض المسائل تطبيق لما أخذناه بالمحاضرات السابقة..

"المسألة الأولى"

مثلث (ABD) قائم الزاوية في (A) ومتساوي الساقين طول ضلعه القائم يساوي (1), تتحرك في مستو ثابت بحيث تتركب حركتها في ثلاث دورانات في المستوي الثابت حول النقط الثلاث A, B, D قيمها على التوالي :

$$\omega_A = 1 + 2t.\tan t - \tan^2 t \quad ,\omega_B = -2\tan t \quad ,\omega_D = \tan^2 t$$

والمطلوب: 1- عين القاعدة والمتدحرج .

2- عين معادلات حركة النقطة (A) .

الحل

نختار في المستوي الثابت المحورين o_1x_1, o_1y_1 ونختار المحاور المتماسكة مع الصفيحة (المثلث) منطبقة على ضلعيها Ax, Ay ، إن حركة الصفيحة مستوية ، والدورانات الثلاث هي دورانات متوازية تعامد مستوي الحركة ونلاحظ أن :

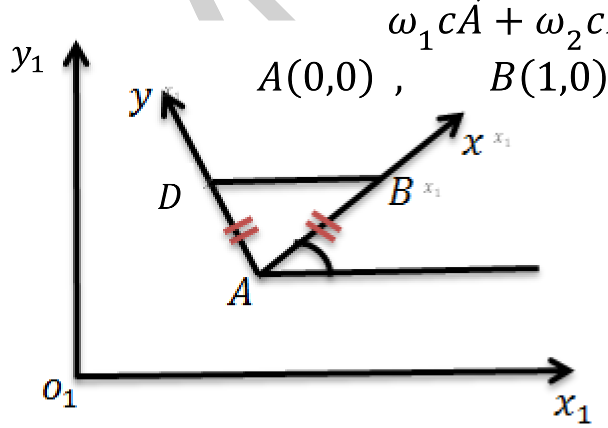
$$\overrightarrow{\omega_A}//\overrightarrow{\omega_B}//\overrightarrow{\omega_D}$$

$$\omega_A + \omega_B + \omega_D = 1 \neq 0$$

أي أن الحركة دورانية آنية حول محور آني (ω) يمر من مركز مجموعة النقاط (c) "حيث (c) هي المركز الآني للدورانات" ويتعين من العلاقة :

$$\omega_1\overrightarrow{cA} + \omega_2\overrightarrow{cB} + \omega_3\overrightarrow{cD} = 0 \ldots (*)$$

$$A(0,0) \quad , \quad B(1,0) \quad , \quad D(0,1) \quad , \quad c(x,y)$$



اخترنا $A(0,0)$ مبدأ الاحداثيات والنقطتان $B(1,0)$ و $D(0,1)$ من نص المسألة ((متساويان الساقين وطول ضلعه 1)) والنقطة $c(x,y)$ مركز المثلث .

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد :

$$\omega_1(x-0, y-0) + \omega_2(x-1, y-0) + \omega_3(x-0, y-1) = 0$$

وبالمطابقة على المحور x نجد :

$$(\omega_1+\omega_2+\omega_3)x-\omega_2=0$$
$$\Rightarrow x=\omega_2=-2\tan t\quad ...(1)$$

وبالمطابقة على المحور y نجد :

$$(\omega_1+\omega_2+\omega_3)y-\omega_3=0$$
$$\Rightarrow y=\omega_3=\tan^2 t\quad ...(2)$$

من العلاقة (1) نجد : $\tan t=\frac{x}{-2}$ وبالتربيع والتعويض بالعلاقة (2) نجد :

$$y=\frac{x^2}{4}\Rightarrow x^2=4y$$

وهي عبارة عن معادلة قطع مكافئ وتمثل المتدحرج .

إيجاد القاعدة

لتعيين القاعدة يجب تعيين احداثيات النقطة c بالنسبة للمحورين o_1x_1,o_1y_1 من أجل ذلك نكتب الشرط $\vec{V_e}(I)=\vec{0}$ أو $\vec{V_a}(I)=\vec{V_r}(I)$ بحيث $I=c$

أي :

$$x_1'\vec{\imath_1}+y_1'\vec{\jmath_1}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}\dots\dots(\#)$$

لدينا محصلة الدورانات تساوي $\theta'=1=\omega$ وهي مشتق الزاوية ومنه :

$$\Rightarrow\theta=\int\omega.dt\ \Rightarrow\theta=\int 1.dt\Rightarrow\theta=t+\theta_0$$

في بداية الحركة $t=0\ ,\theta=0\ \Leftarrow\ \theta_0=0$

$$\boxed{\Rightarrow\theta=t}$$

نعلم أن للتحويل من الجملة المتماسكة إلى الجملة الثابتة نسقط $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ على المحورين x_1,y_1 :

$$\vec{\imath}=\cos\theta\,\vec{\imath_1}+\sin\theta\,\vec{\jmath_1}\quad,\quad\vec{\jmath}=-\sin\theta\,\vec{\imath_1}+\cos\theta\,\vec{\jmath_1}$$
$$\Rightarrow\vec{\imath}=\cos t\,\vec{\imath_1}+\sin t\,\vec{\jmath_1}\quad,\quad\vec{\jmath}=-\sin t\,\vec{\imath_1}+\cos t\,\vec{\jmath_1}$$

وبالتعويض بالعلاقة (#) نجد :

$$x_1'\vec{\imath_1}+y_1'\vec{\jmath_1}=x'(\cos\theta\,\vec{\imath_1}+\sin\theta\,\vec{\jmath_1})+y'(-\sin\theta\,\vec{\imath_1}+\cos\theta\,\vec{\jmath_1})$$

وبالمطابقة نجد :

$$x_1'=x'\cos t-y'\sin t\dots\dots(1)$$
$$y_1'=x'\sin t+y'\cos t\dots\dots(2)$$

لدينا $x=-2\tan t\Rightarrow x'=-\frac{2}{\cos^2 t}$ ولدينا ايضاً $y=\tan^2 t\Rightarrow y'=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}$

وبالتعويض بالعلاقة (1) فنجد :

$$\Rightarrow x_1'=\frac{-2\cos t}{\cos^2 t}-\frac{2}{\cos^3 t}.\sin^2 t\Rightarrow x_1'=\frac{-2}{\cos t}-\frac{2\sin^2 t}{\cos^3 t}$$
$$\Rightarrow x_1'=\frac{-2}{\cos^3 t}\Rightarrow x_1=\int\frac{-2}{\cos^3 t}dt$$

وبالتعويض بالعلاقة (2) أيضاً فنجد :

$$y_1' = \frac{-2\sin t}{\cos^2 t} + \frac{2\sin t}{\cos^3 t}.\cos t = 0$$
$$\Longrightarrow y_1 = \mathrm{C}$$

ومنه القاعدة هي عبارة عن مستقيم يوازي (o_1x_1) .

معادلات الحركة هي x_A, y_A, θ

لإيجاد معادلات حركة $A(x_A, y_A)$ نحسب أولاً سرعة النقطة A :

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = \overrightarrow{\omega_B} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_D} \wedge \overrightarrow{AD} = x_1'\overrightarrow{\imath_1} + y_1'\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$\vec{V}(A) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega_B \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega_D \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = (\sin t\,.\,\omega_B + \cos t\,.\,\omega_D)\overrightarrow{\imath_1} + (-\cos t\,.\,\omega_B + \sin t\,.\,\omega_D)\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(A) = (-2\sin t\,.\tan t + \cos t\,.\tan^2 t)\overrightarrow{\imath_1} + (2\cos t\,.\tan t + \sin t\,.\tan^2 t)\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$x_1'(A) = \frac{-2\sin^2 t}{\cos t} + \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{-\sin^2 t}{\cos t}$$

$$y_1'(A) = -2\sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$$

$$x_1(A) = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt$$

$$\Longrightarrow x_1(A) = -\int \frac{dt}{\cos t} + \int \cos t\, dt$$

بفرض $\tan\frac{t}{2} = u \Longleftarrow dt = \frac{2du}{1+u^2}$

$$\Longrightarrow \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = 2\int \frac{du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = 2\int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}\right) du$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x_1(A) = -\ln\left|\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right| + \sin t + c_1$$

$$y_1(A) = -2\cos t + \underbrace{\int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt}_{(I)}$$

بفرض : $\cos t = u \implies -\sin t\, dt = du$

$$I = -\int \frac{1-u^2}{u^2} du = -\int \frac{du}{u^2} + \int du$$

$$I = \frac{1}{u} + u + c_2 \implies I = \frac{1}{\cos t} + \cos t$$

$$\implies y_1(A) = -\cos t + \frac{1}{\cos t} + c_2$$

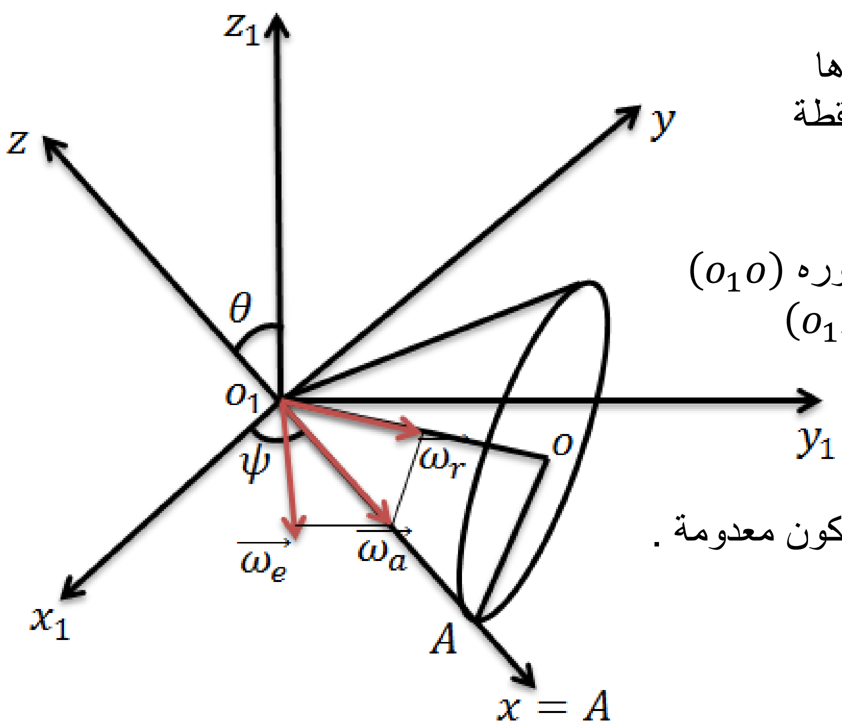
"المسألة الثانية"

يتدحرج مخروط دوراني ارتفاعه $(h = 4)$, نصف قطر قاعدته $(r = 3)$, نصف زاويته الرأسية (α) دون انزلاق على المستوي الأفقي $(o_1x_1y_1)$ بحيث يبقى رأسه (o_1) ثابتا, علما أن القيمة العددية لسرعة مركز قاعدة المخروط وهي (o) , $V(o) = 48$ والمطلوب :

1- عين شعاع الدوران الجري للمخروط حول (o_1z_1) .

2- عين شعاع الدوران الآني له بدلالة الزمن .

الحل



نوع الحركة " حركة دورانية حول نقطة ثابتة "

نختار جملة المحاور الثابتة $(o_1x_1y_1z_1)$

بما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة سنعتبرها حركة دورانية حول محور آني يمر من هذه النقطة بشرط ذهاب إحدى الحركات الدورانية

وسنعتبر بأن الحركة هي تركيب حركتين :

الحركة النسبية هي دوران المخروط حول محوره (o_1o)

الحركة الجرية هي دوران المخروط حول (o_1z_1)

وبما أن الحركة هي تدحرج دون انزلاق فسرع نقاط التماس تكون معدومة

أي سرعة $\vec{V}(o_1) = \vec{0}$

و $\vec{V}(A) = \vec{0}$ ومنه سرعة المستقيم (o_1A) تكون معدومة .

أي (o_1A) هو المحور الآني للدوران .

إن $\overrightarrow{\omega_e} \parallel \overrightarrow{k_1}$

$$\vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_a} \wedge \overrightarrow{o_1 o}$$
$$\left|\vec{V}(o)\right| = \left|\overrightarrow{\omega_a}\right|.\left|\overrightarrow{o_1 o}\right|.\sin(\overrightarrow{\omega_a}, \overrightarrow{o_1 o})$$
$$\Rightarrow \left|\vec{V}(o)\right| = \left|\overrightarrow{\omega_a}\right|.|4|.\sin\alpha \quad \dots(1)$$

من المثلث o_1oA حسب فيثاغورس

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right)^2 = (\overrightarrow{o_1 o})^2 + \left(\overrightarrow{oA}\right)^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right)^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{o_1A}\right) = 5$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad , \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

نعوض في (1) :

$$48 = \left|\overrightarrow{\omega_a}\right|.|4|.\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{\omega_a}\right| = 20$$
$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}$$
$$\vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_a} \wedge \overrightarrow{o_1 o} \Rightarrow \vec{V}(o) = (\overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}) \wedge \overrightarrow{o_1 o}$$
$$\Rightarrow \vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{o_1 o} + \overrightarrow{\omega_r} \wedge \overrightarrow{o_1 o} \Rightarrow \vec{V}(o) = \overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{o_1 o} + \vec{0}$$

$\overrightarrow{\omega_r} \wedge \overrightarrow{o_1 o} = 0$ بسبب $\overrightarrow{\omega_r} // \overrightarrow{o_1 o}$

$$\left|\vec{V}(o)\right| = \left|\overrightarrow{\omega_e}\right|.\left|\overrightarrow{o_1 o}\right|.\sin(\overrightarrow{\omega_e}, \overrightarrow{o_1 o})$$

إن $o_1z_1 \perp o_1A$

$$\Rightarrow 48 = \left|\overrightarrow{\omega_e}\right|.|4|.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$
$$\Rightarrow 48 = \left|\overrightarrow{\omega_e}\right|.|4|.\cos\alpha$$
$$\Rightarrow 48 = \left|\overrightarrow{\omega_e}\right|.|4|.\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{\omega_a}\right| = 15 \ \Rightarrow \psi' = 15 \ \Rightarrow \psi = 15t$$
$$\left|\overrightarrow{\omega_e}\right| = -15\overrightarrow{k_1}$$
$$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_a}.\vec{\imath} = 20\cos\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + 20\sin\psi\,\overrightarrow{J_1}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\omega_a} = 20\cos 15t\,\overrightarrow{\imath_1} + 20\sin 15t\,\overrightarrow{J_1}$$

"مسألة محلولة صفحة 116 "

$(o_1x_1y_1)$ محوران متعامدان في مستو ثابت , (Δ) مستقيم يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها (o_1) نصف قطرها (1) بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة (c) تماس المستقيم (Δ) مع الدائرة $(o_1, 1)$ بحيث تبقى السرعة الزاوية ثابتة وتساوي (ω) . (M) نقطة مادية تتحرك على (Δ) بحركة منتظمة سرعتها (v) ثابتة ، كان المستقيم (Δ) في لحظة البدء مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت (M) في النقطة (A) ، أي A, M, c منطبقة في لحظة البدء

والمطلوب : **1-** عين الإحداثيات المطلقة للنقطة (M) بدلالة الجملة $(o_1x_1y_1)$

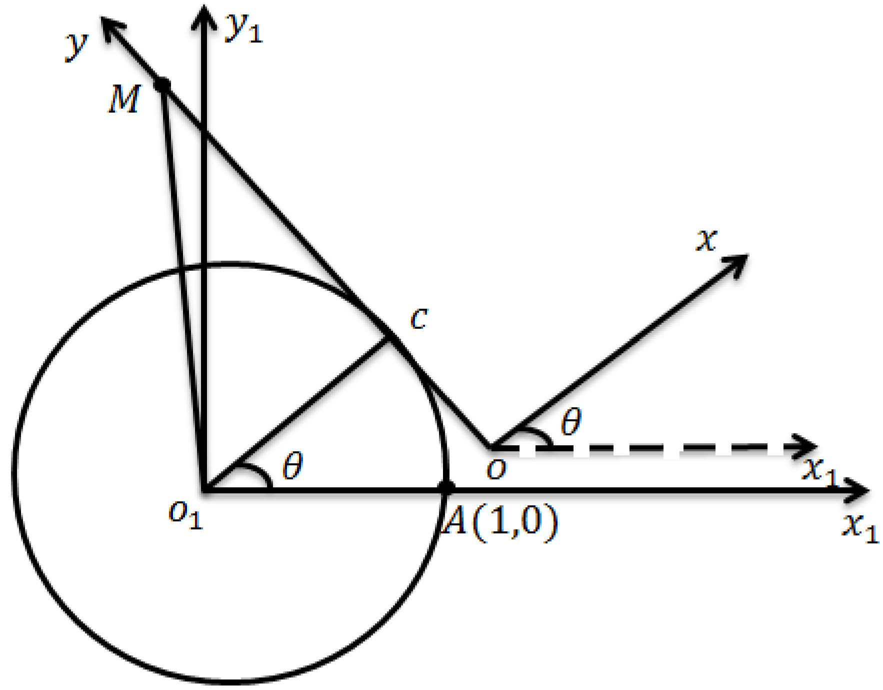
2- عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة (A)

3- عين العلاقة التي تربط (v) بـ (ω) كي يكون $(\overrightarrow{\Gamma_a})$ محمولا على (Δ) .

الحل

إن حركة (M) هي محصلة حركتين **حركة نسبية** وهي حركتها على المستقيم (Δ) **وحركة جرية** مع المستقيم (Δ) وهي حركة مستوية . بما أن حركة (Δ) تتدحرج دون انزلاق فإن نقطة التماس (c) هي المركز الآني للدوران في الحركة المستوية :

نختار النقطة (o) مبدأ الاحداثيات للجملة المتماسكة مع المستقيم (Δ) التي كانت فيه النقطة (A) لحظة البدء .



فمن شرط التدحرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس (c) " **المركز الآني للدوران**" على المستقيم (Δ) "وهو المتدحرج" تساوي المسافة التي تقطعها النقطة (c) على الدائرة $(o_1, 1)$ "القاعدة" أي أن طول $(\overline{oc})$ يساوي طول القوس $(\widehat{Ac})$ فإذا سمينا الزاوية بين (o_1c) و (o_1x_1) هي (θ) كان لدينا $\overline{oc} = (\widehat{Ac}) = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة يساوي الواحد)

نختار المحور (oy) منطبقا على (Δ) والمحور (ox) العمود على (Δ) في النقطة (o) .

1- لتعيين موضع النقطة (M) نكتب :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{cM}$$

إن $\overrightarrow{cM}$ هي عبارة عن $\overrightarrow{oM} - \overrightarrow{oc}$ ومنه $\overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = 1(\cos\theta\,\vec{\imath_1} + \sin\theta\,\vec{\jmath_1}) + co\vec{\jmath} + oM\vec{\jmath}$$

ولأن الحركة تتدحرج دون انزلاق ((فالمسافة المقطوعة على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة على المتدحرج)) أي أن : $|\widehat{Ac}| = |\overline{co}| = r.\theta$

$$\theta' = \omega \Longrightarrow \theta = \omega t$$

$$\overrightarrow{o_1M} = \int v\,.dt = v.t + c$$

من شروط البدء $t = 0\ ,\ \overrightarrow{o_1M} = 0 \quad \Longrightarrow c = 0$

$$\overrightarrow{oM} = v.t\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{co} = -\omega.t\vec{\jmath}$$

نعلم أن : $\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{\imath_1} + \cos\theta\,\vec{\jmath_1}$

$$\Longrightarrow \vec{\jmath} = -\sin\omega t\,\vec{\imath_1} + \cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = \cos\omega t\,\vec{\imath_1} + \sin\omega t\,\vec{\jmath_1} - (v-\omega)t.\sin\omega t\,\vec{\imath_1} + (v-\omega)t.\cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = (\cos\omega t - (v-\omega)t.\sin\omega t)\vec{\imath_1} + (\sin\omega t + (v-\omega)t.\cos\omega t)\vec{\jmath_1}$$

بالاشتقاق المباشر نحصل على $(\vec{V_a})$ و $(\vec{\Gamma_a})$

أو عن طريق تركيب الحركات

إن حركة (M) على المستقيم هي حركة نسبية وبالتالي :

$$\vec{V_r}(M) = v\vec{\jmath}$$

وهي حركة مستوية$(o_1x_1y_1)$ بالنسبة لـ (Δ) مع (M) وهي (الحركة الجرية)

وبالتالي السرعة الجرية في الحركة المستوية هي :

$$\vec{V_e}(\mathrm{M}) = \vec{V}(o) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{o_1M} \quad \text{أو} \quad \vec{V_e}(M) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{cM}$$

$$\vec{V_e}(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & (v-\omega)t & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{V_e}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\imath}$$

وبالتالي السرعة المطلقة هي مجموع السرعتين الجرية و النسبية

$$\vec{V_a}(\mathrm{M}) = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

$$\Longrightarrow \vec{V_a}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$$

وللحصول على التسارع نطبق القانون التالي :

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{V_a}(M)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = -\omega(v-\omega)\vec{\imath} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega(v-\omega)t & v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(M) = [-\omega(v-\omega) - v\omega]\vec{\imath} - \omega^2(v-\omega)t\vec{\jmath}$$

كي يحمل $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$ على (Δ) يجب أن تكون المركبة على (x) معدومة لذلك نكتب

$$-\omega(v-\omega) - v\omega = 0$$

$$\Rightarrow v - \omega = -v \Rightarrow 2v = \omega \Rightarrow v = \frac{\omega}{2}$$

أسرة سيريا ماث تتمنى لكم امتحاناً موفقاً سائلين الله التوفيق لنا ولكم....وتأمل بأن تكون قد أدت مهمتها على أكمل وجه بتبسيط وتوضيح فقرات المقرر ...فإن احسنا فمن الله وإن أخطأنا فمن أنفسنا ومن الشيطان.... راجين منكم الدعاء .

" وكل عام وأنتم بألف خير "

مستعدين لتلقي استفساراتكم واسئلتكم على غروبكم
syria Math 3rd Year

كل الشكر لمن ساهم في إنجاز هذا المقرر حتى وإن لم يذكر... وجعله الله في صحائف أعماله

انتهى المقرر

وما عجبي موت المُحبّين في الهوى ولكن بقاء العاشقين عجيبُ

فواللهِ لا أنساكِ ما هبّتِ الصبّا وما عقبتها في الرّياح جنوبُ

إعداد: محمد علي فليون ** لمى حبشية