نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : السادسة عشر عنوان المحاضرة : التقارب بالإطلاق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-التقارب بإطلاق

٢- اختبارات التقارب بإطلاق

التقارب بالإطلاق

نقول عن $\sum 3_n$ أنها متقاربة بإطلاق إذا كانت متسلسلة الطويلات لها متقاربة ($\sum|3_n|$ متقاربة)

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ متقاربة}$$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ ليست متقاربة بالإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ متباعدة}$$

مبرهنة : كل متقاربة بالإطلاق متقاربة

الإثبات

$$\sum 3_n \text{ متقاربة بإطلاق } \overset{\text{تعريفاً}}{\Leftrightarrow} \sum |3_n| \text{ متقاربة}$$

$$\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists N > 0\,; \forall m > n \geq N :\ |3_{n+1}| + \cdots + |3_m| < \varepsilon$$

بالتالي :

$$|\mathfrak{Z}_{n+1}+\mathfrak{Z}_{n+2}+\cdots+\mathfrak{Z}_m| \le |\mathfrak{Z}_{n+1}|+\cdots+|\mathfrak{Z}_m| < \varepsilon$$

$\Leftarrow \sum \mathfrak{Z}_n$ متقاربة

◄ **ملاحظة**

العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي قد توجد متسلسلة متقاربة وليست متقاربة بإطلاق نسمي مثل هذه المتسلسلة متسلسلة متقاربة شرطياً

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ رأينا سابقاً أنها ليست متقاربة بإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}-\frac{1}{6}-\frac{i}{7}+\cdots$$

الأن سوف نجزأها إلى متسلسلتين حقيقية و تخيلية لأثبات إنها متقاربة

مثال $i=(0+i)$, $-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}+0i\right)$

بالتالي تصبح :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = (0+i)+\left(-\frac{1}{2}+0i\right)+\left(0-\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+0i\right)+\left(0+\frac{1}{5}i\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{6}+0i\right)+\left(0-\frac{1}{7}i\right)+\cdots$$

إن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي :

$$0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

وهي متقاربة (وذلك حسب ليبنز متناوبة وحدها العام بالقيمة المطلقة متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر)

وكذلك فإن متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

وهي متقاربة أيضاً حسب ليبنز

$\Leftarrow \sum\frac{i^n}{n}$ متقاربة $\Leftarrow \sum\frac{i^n}{n}$ متقاربة شرطيا

تمرين أثبت أن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ متقاربة شرطياً

◄ملاحظة

لا يسمح بإجراء عدد غير منتهي من التبديل بين حدود متسلسلة ولا بتجميع عدد غير منتهي من الحدود ولا القيم بعدد غير منتهي من عمليات التجميع لأن ذلك يؤثر على طبيعتها حتى إن لم يؤثر ذلك على طبيعتها (تقاربها أو تباعدها)فإن ذلك سيؤثر على مجموعها

أما إذا كانت المتسلسلة متقاربة بإطلاق فإن ذلك لا يؤثر على طبيعتها

سؤال : هل يؤثر على مجموعها ؟ (وظيفة)

اختبارات التقارب بإطلاق

١ اختبار المقارنة :

لتكن $\sum \mathfrak{Z}_n$ متسلسلة عقدية

ولتكن $\sum \alpha_n$متسلسلة ذات حدود حقيقية غير سالبة ولنفرض وجود عددين N,K

بحيث يحقق $|\mathfrak{Z}_n|\le k\alpha_n$ لأجل كل $N\le n$ عندئذ :

تقارب $\sum \alpha_n$ يقتضي التقارب بإطلاق لـ$\sum З_n$

الأثبات :

بفرض $\sum \alpha_n$ متقاربة عندئذ $\sum k\alpha_n$ متقاربة أيضاً $\xLeftarrow{\text{حسب اختيار المقارنة}}$

$\sum |З_n|$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum З_n$ متقاربة بالإطلاق

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n cis\, n}{n^2}$ حيث a ثابت عقدي و $|a| \le 1$

الحل :

$$|З_n| = \left|\frac{a^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{|a^n||cis\, n|}{n^2} = \frac{|a^n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنه :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n cis\, n}{n^2}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n cis\, n}{n^2 2} = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2}$

$$|З_n| = \left|\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right||cis\, n|}{n^2} = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n cis\, n}{n^2 2^n}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة

٢ اختباركوشي (الجذر النوني)

لتكن $\sum З_n$ متسلسلة عقدية و $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|З_n|}$

عندئذ :

١- $l < 1$ فإن $\sum \mathfrak{Z}_n$ متقاربة بإطلاق
٢- $l > 1$ فإن $\sum \mathfrak{Z}_n$ متباعدة
٣- $l = 1$ (حالة شك) يفشل الاختبار في تحديد طبيعة المتسلسلة

◄**نتيجة** إذا كانت $\sum \mathfrak{Z}_n$ متسلسلة عقدية ووجد عدد عقدي $\lambda < 1$ بحيث يكون :

$|\mathfrak{Z}_n| < \lambda^n$ أياً كانت $N \leq n$ لأجل N كبيرة كفاية فإن $\sum \mathfrak{Z}_n$ متقاربة بإطلاق

مثال : $\sum \lambda^n$ متسلسلة هندسية حقيقية أساسها λ وفي $1 > \lambda$ و هي متقاربة وتحقق هذه المتراجحة حسب اختبار المقارنة يؤدي إلى $|\mathfrak{Z}_n|$ متقاربة بالإطلاق

◄**تذكرة**

النهاية العليا و النهاية الدنيا لمتتالية حقيقية :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية ولنعرف المتتالية $\{a_n\}$ من $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$a_0 = \mathrm{Sup}\{x_0, x_1, ..\}$$

$$a_1 = \mathrm{Sup}\{x_1, x_2, ..\}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \mathrm{Sup}\{xk\} \,;\, k \geq n$$

من الواضح أن $a_{n+1} \leq a_n \Leftarrow \{a_n\}$ متناقصة

ونهاية $\{a_n\}$ ليس بالضرورة محدودة

$$\lim Sup\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim a_n$$

ولنعرف المتتالية $\{b_n\}$ من $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$b_0 = \inf\{x_0, x_1, ..\}$$

$$b_1 = \inf\{x_1, x_2, ..\}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \inf\{xk\} \,;\; \forall k \geq n$$

من الواضح أن $b_{n+1} \geq b_n \leftarrow \{b_n\}$ متزايدة

$$\lim inf\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim b_n$$

مثال المتتالية $\{(-1)^n\}$ متتالية حقيقية متباعدة (لأنها متناوبة)

$$a_0 = \mathrm{Sup}\{+1, -1, +1, -1, \dots\} = 1$$

$$a_1 = \mathrm{Sup}\{-1, +1, \dots\} = 1$$

$$a_n = \mathrm{Sup}\{-1, +1\} = 1 \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} 1$$

$$\to \lim Sup(-1)^n = \overline{\lim}(-1)^n = 1$$

كما أن :

$$b_0 = \inf\{+1, -1, +1, \dots\} = -1$$

$$b_1 = \inf\{-1, +1, -1, \dots\} = -1$$

$$b_n = \inf\{-1, +1\} = -1 \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} -1$$

$$\longrightarrow \lim \inf(-1)^n = \underline{\lim}(-1)^n = -1$$

خواص :

١- $\underline{\lim}\, x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

٢- $\lim x_n$ موجود في $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

٣- إن $\overline{\lim}\, x_n$ هي أكبر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$

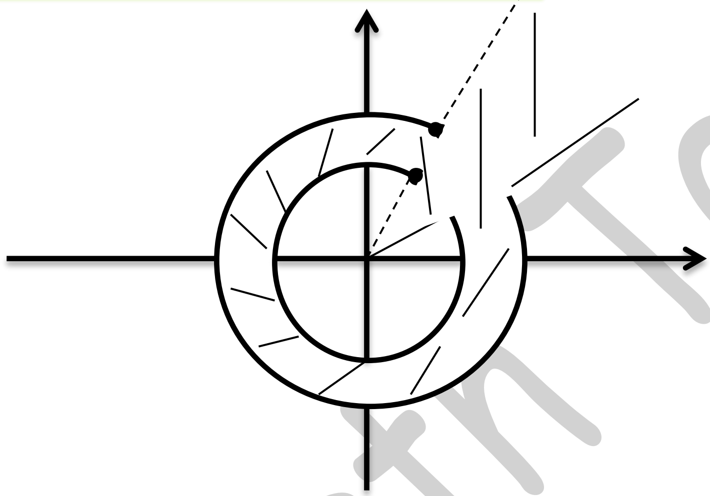
٤- إن $\underline{\lim}\, x_n$ هي أصغر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$

ملاحظة : لن نستخدم معايير المقارنة بالإطلاق عند أثبات إن المتسلسلة متقاربة شرطياً

انتهت المحاضرة

إعداد:ميار طعمة–شهناز طاطيش–يمنى خرما

تصحيح محاضرة ١٢رسمة $A \cup B$



تصحيح محاضرة ١٢ رسمة $B\setminus A$