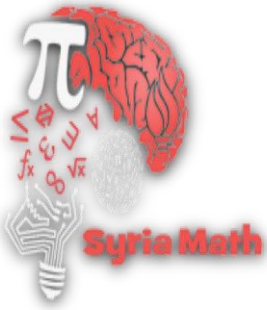

◄ دكتور المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: السابعة عشر عنوان المحاضرة: التفاضل العددي

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعريف التفاضل

٢ـ صيغة المشتق(تقدمية- تراجعية .....)

ولنبدأ .... ^_^:

يعرف التفاضل العددي بأنه اجرائية عددية لحساب قيمة المشتق لدالة ما عند نقاط محدودة

لدينا الدّالة f نريد أن نحسب مشتق هذه الدالة عند نقطة مفروضة ولتكن (x_0)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

حيث (h) هي المسافة بين نقطتين

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow F(x)=p_1+E_1$$

$$f(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\theta_x)$$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0+x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_0+x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}f''(\theta_x)$$

وتكون المسافة بين النقطتين هي h $x_i=x_0+h$

$$\Rightarrow f(x)=f(x)\frac{x-x_0-h}{-h}+f(x_0+h)\frac{x-x_0}{h}+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!}f''(\theta_x)$$

$$f'(x)=\frac{-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)}{h}+D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!}f''(\theta_x)\right]$$

Syria Math Team

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{x-x_0-h}{2!}f''(\theta_x) + \frac{(x-x_0)}{2!}f''(\theta_x) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!}D_x f''(\theta_x)$$

ايجاد المشتق عند نقطة محدودة $f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{p_i \text{ تقدمية}} - \underbrace{\frac{h}{2!}f''(\theta_x)}_{E}$

وفيما يلي نورد جدولاً يحوي قوانين لإيجاد المشتق وذلك تبعاً لعدد النقاط علماً أنَّ المعطيات وشكل المسألة يدلّك على معرفة القانون السليم، وكلّ شيء سيتوضح بالأمثلة

عدد النقاط	قانون المشتق $f'(x)$	الخطأ
2	تقدمية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$E = \left\|\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\|$
2	تراجعية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$	$E = \left\|\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\|$
3	تقدمية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	$E = \left\|\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$
3	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)]$	$E = \left\|\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$
3	تراجعية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)]$	$E = \left\|\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\|$
5	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	$E = \left\|\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\theta_x)\right\|$
5	تقدّمية $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]$	$E = \left\|\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\theta_x)\right\|$

Syria Math Team

مثال: أوجد المشتق للدّالة f عند $x_0 = 0.2$ علماً أنَّ:

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2.11	3.04	5.12

الحل: لدينا:

$h_1 = 0.4 - 0.2 = 0.2$

$h_2 = 0.2 - 0.1 = 0.1$

نلاحظ أنَّ النّقاط ليست متساوية البعد لذلك لا نطبّق قانون مشتق الدّالة عند ثلاث نقاط

لذلك نلجأ لقانون الاشتقاق الّذي يحوي نقطتين

وهنا لدينا المشتق المطلوب عندما $x = 0.2$ ومنه فسوف نعتبر النقطتان هما:

$x_0 = 0.2 \quad , \quad x_1 = x_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4 \quad ; h = 0.2$

نطبّق قانون التقدّميّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي تليها...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{5.12 - 3.04}{0.2} \approx 10.4$$

ثمَّ نعتبر النقطتان هما:

$x_0 = 0.2 \quad , \quad x_1 = x_0 - h = 0.2 - 0.1 = 0.4 \quad ; h = 0.1$

نطبّق قانون التّراجعيّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي قبلها...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \approx \frac{3.04 - 2.11}{0.1} \approx 9.3$$

تنويه: " في مثل هذا السؤال لن يطلب حساب قيمة الخطأ لأنّه لم يعطى f بنص السؤال "

مثال آخر: استخدم أفضل الصّيغ لإتمام الجدول التالي:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0.1	2.11	
0.2	3.56	
0.3	1.02	

نستخدم ثلاث نقاط للصيغة التقدمية والمركزية والتراجعية

Syria Math Team

الحل:

نلاحظ أن النقاط الثلاث متساوية البعد $h = x - x_0 = x_2 - x_1 = 0.1$
نطبّق القوانين الّتي تحوي ثلاث نقاط لأنَّ النقاط متساوية البعد.

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.1$:

نلاحظ أنّ 0.1 هي أوّل نقطة أي سنطبّق قانون التقدّميّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h]$$

$$\Rightarrow f'(0.1) = \frac{1}{2(0.1)}[-3(2.11) + 4(3.56) - 1.02] = 34.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.2$:

نلاحظ أنّ 0.2 هي نقطة المنتصف(المركز) أي سنطبّق عليها قانون المركزية لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$$

$$\Rightarrow f'(0.2) = \frac{1}{2(0.1)}[-(2.11) + 1.02] = -5.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.3$:

نلاحظ أنّ 0.3 هي آخر نقطة أي سنطبّق عليها قانون التراجعيّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)]$$

$$\Rightarrow f'(0.3) = \frac{1}{2(0.1)}[(2.11) - 4(3.56) + 3(1.02)] = -45.35$$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر & هديل سعد & علا الدلاتي

ستكون يوما ما تريد عندما تؤمن بأن العالم بما فيه ليس أذكى وأقوى منك..

Syria Math Team