نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الرابع عشرة

◄ عنوان المحاضرة: تمارين محلولة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-حل تمارين لأفكار سابقة.

2-معادلة لاغرانج.

تمرين 1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x.y'' - x.y' + y = 0 \ldots (1)}$$

الحل

نلاحظ أنّ: $y_1 = x$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية (1)

$$y = y_1.z \Rightarrow y = x.z$$

$$y' = z + x.z'$$

$$y'' = z' + z' + x.z'' \Rightarrow y'' = 2z' + x.z''$$

والآن نعوض بالمعادلة (1) فنحصل على التالي:

$$x.(2z' + x.z'') - x.(z + x.z') + (x.z) = 0$$

$$2xz' - x^2z' + x^2z'' = 0 \Rightarrow x^2z'' + (2 - x)z'x = 0 \ldots (2)$$

التحويل الثاني: $u = z' \Rightarrow u' = z''$

والآن نعوض بالمعادلة (2):

$$x^2.u' + (2 - x)x.u = 0$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى نوجد الحل العام لها.

نقسم طرفي المعادلة على $x^2 \neq 0$:

$$u' + \frac{2-x}{x}.u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{x-2}{x}.dx \Rightarrow \ln u = x - 2\ln x + c_1$$

$$\Rightarrow u = e^{x-2\ln x + c_1} = \frac{e^{x+c_1}}{e^{\ln x^2}}$$

$$u = \frac{e^{x+c_1}}{x^2}$$

تمرين2: أوجد الحل للمعادلة التفاضلية:

$$x = e^{y'} - y' \dots (1)$$

الحل

نفرض: $y' = t$

$$x = e^t - t$$

لدينا العلاقة الأساسية:

$$dy = y'.dx$$

$$\Rightarrow dy = t.(e^t - 1)dt \Rightarrow y = \int t.(e^t - 1)dt = \int \underbrace{t.e^t.dt}_{\text{تجزئة}} - \int t.dt$$

نكامل فنحصل على الحل العام التالي:

$$y = (t-1).e^t - \frac{t^2}{2} + c$$

$$I = \int t.e^t.dt$$

نكامل بالتجزئة كالتالي:

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$I = t.e^t - \int e^t dt$$

$$I = (t-1).e^t$$

تمرين3: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y = y' + \ln y' \dots (1)}$$

الحل

نفرض: $y' = t$

العلاقة الأساسية: $dy = y'.dx \dots (*) \Rightarrow dy = t.dx$

من $(*)$ نجد: $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{t}$

نعوض ما سبق بالمعادلة التفاضلية (1):

$$y = t + \ln t \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} dy = \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

ولدينا العلاقة الأساسية: $dy = t.dx$

من العلاقتين نجد: $1 + \frac{1}{t} = t.dx \Rightarrow dx = \frac{1+\frac{1}{t}}{t} = \frac{\frac{t+1}{t}}{t} = \frac{t+1}{t^2}$

$$\Rightarrow x = \ln x - \frac{1}{t} + c$$

معادلة لاغرانج

نسمي كل معادلة تفاضلية في x, y من الشكل:

$y = x.f(P) + g(P)$ بمعادلة لاغرانج

حيث $f(P), g(P)$ هما تابعان ل $y' = P$ هذه المعادلة محلولة بالنسبة ل y ومعادلة كليرو هي حالة خاصة منها.

لحلها نشتق بالنسبة لx :

$$P = f(P) + [x.f'(P) + g'(P)].\frac{dP}{dx}$$

إذا اعتبرنا x التابع و P هو المتحول نجد أنّ:

$$\frac{dx}{dP} - \frac{f'(P)}{P.f(P)}.x = \frac{g'(P)}{P - f(P)}$$

حيث: $P - f(P) \neq 0$

فيكون الحل العام تابع ضمني في x :

$$x = c.\varphi(P) + \Psi(P)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$y = c.\varphi_1(P) + \varphi_2(P)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحُلَبي ورهف النقشي

الحياة رواية جميلة إقرائها حتى النهاية

لا تتوقف عند سطر حزين فقد تكون النهاية جميلة

#ساعد غيرك