نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة الرابعة عشر عنوان المحاضرة : الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع /مستمر ولدالة في المتغير العشوائي المنفصل / المستمر .

٢ـ التوقع الرياضي لدالة في متغيرين عشوائيين .

٣ـ العزوم والعزم المركزي .

الفصل السادس : الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع ولدالة في المتغير العشوائي المنفصل

تعريف ليكن لدينا Y متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ، عندئذٍ :

نعرف التوقع الرياضي لـ Y بالشكل : $E(Y) = \sum_{y\in\mathbb{R}_Y} Y.f_Y(y)$ من أجل كل القيم لـ Y

وذلك بشرط أنَّ : $\sum_{y\in\mathbb{R}_Y} |Y|.f_Y(y) < +\infty$ ، أي أننا نقول أنَّ توقع Y موجود إذا كان:

$$\sum_y |y|.f_Y(y) < +\infty$$

◄ملاحظة إنَّ $E(Y)$ يمثل متوسط القيم التي يأخذها Y على المدى الطويل ، أي متوسط من القياسات الموافقة لـ Y ، إذا كررنا التجربة عدد كبير من المرات ، وأيضاً تمثل قيمة $E(Y)$ الموقع على المحور ox والتي يتمركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ Y ، ولذلك هذه القيمة تسمى متوسط التوزيع الاحتمالي .

مثال ليكن Y متغيراً عشوائياً جدول كثافته :

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

والمطلوب : عين توقع Y : $E(Y)$

الحل $E(Y)=\sum_{y\in\mathbb{R}_Y} y.f_Y(y)=(0)\left(\frac{1}{8}\right)+(1)\left(\frac{3}{8}\right)+(2)\left(\frac{3}{8}\right)+(3)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{12}{8}=1,5$

تعريف ليكن لدينا Y متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ولتكن $g(Y)$ دالة في Y ، عندئذٍ نعرف التوقع : $E\big(g(Y)\big):=\sum_{y\in\mathbb{R}_Y} g(y).f_Y(y)$

وذلك شريطة أنَّ يكون : $\sum_{y\in\mathbb{R}_Y}|g(y)|.f_Y(y)<+\infty$

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر ولدالة فيه

تعريف ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية $f_X(x)$، $g(X)$ دالة في X عندئذٍ يكون :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} X.f_X(x).dx \quad ، \quad E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(X).f_X(x).dx$$

ويكون هذا التوقع موجود إذا تحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|X|.f_X(x).dx<+\infty \quad ، \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|g(X)|.f_X(x).dx<+\infty$$

مثال ليكن Y متغيراً عشوائياً له الكثافة :

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3} & ;y\in[2,5]\\ 0 & ;\text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين $E(Y)$ وَ $E(Y^2)$ وَ $E(Y+1)$.

الحل

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y.f_Y(y).dy=\int_2^5 Y\left(\frac{1}{3}\right).dy=\frac{1}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^5=\frac{7}{2}=3.5$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y^2 f_Y(y).dy=\int_2^5 y^2\left(\frac{1}{3}\right).dy=\frac{1}{3}\left[\frac{y^2}{3}\right]_2^5=13$$

$$E(Y+1)=\int_{-\infty}^{+\infty}(Y+1).f_Y(y).dy=\int_2^5(Y+1)\left(\frac{1}{3}\right).dy=\frac{1}{3}\left[\frac{Y^2}{2}+Y\right]_2^5=\frac{9}{2}=4.5$$

التوقع الرياضي لدالة في متغيرين عشوائيين

تعريف إذا كان (X,Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً نأخذ القيم (x_i,y_i) باحتمالات $i,j \geq 1 \,; f(x_i,y_j)$

فإنَّ القيمة المتوقعة للدالة $g(x,y)$ تعطى بالعلاقة :

$$E(g(X,Y)) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} g(x_i,y_j).f(x_i,y_j)$$

وإذا كان (X,Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية $f(X,Y)$ فإنَّ القيمة المتوقعة للدالة $g(X,Y)$

تعطى : $E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y).dx.dy$

♥ مبرهنة (بدون برهان) ♥

إذا كان $g_1(x,y)$ و $g_2(x,y)$ دالتين للمتغيرين X,Y وكان التوقع الرياضي لكل منهما موجوداً :

$E|g_1(x,y)| < +\infty \;,\; E|g_2(x,y)| < +\infty$ فإنَّ :

$$E(a_1g_1(X,Y) + a_2g_2(X,Y)) = a_1E(g_1(X,Y)) + a_2E(g_2(X,Y))$$

وذلك من أجل أي عددين حقيقين a_1, a_2

حالة خاصة إذا كان $g_1(X,Y) = X$ ، $g_2(X,Y) = Y$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

خواص التوقع الرياضي

١) $E(c) = c \;;\; c \in \mathbb{R}$

الإثبات $E(c) = \sum_{x\in\mathbb{R}_X} c.f_X(x) = c\sum_{x\in\mathbb{R}_X} f_X(x) = c.1 = c$

$$E(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c.f_X(x).dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = c.1 = c$$

٢) $E(c.X) = c.E(X)\,;\; c \in \mathbb{R}$

٣) $E(\sum_{i=1}^{k} g_i(X)) = \sum_{i=1}^{k} E(g_i(X))$

٤) $|E(X)| \leq E|X|$

٥) إذا كان $a \leq X \leq b$ فإنَّ :

$$a \leq E(X) \leq b \; ; a, b \in \mathbb{R}$$

٦) إذا كان $X \geq 0$ فإنَّ : $E(X) \geq 0$

٧) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين توقعهما موجود $(E|X| < +\infty, |Y| < +\infty)$ فإنه إذا كان : $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

٨) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين ولكل منهما توقع محدود فإنَّ :

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

الإثبات سنكتفي بحالة الاستمرار:

إذا كان (X, Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x, y)$ فإنَّ :

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x, y).dx.dy$$

وبما أنَّ X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين :

$$f(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

$$E(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f_X(x).f_Y(y).dx.dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x).dx.\int_{-\infty}^{+\infty} y.f_Y(y).dy = E(X).E(Y)$$

٩) إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها توقع موجود ، وأيضاً توقع $\prod_{i=1}^{n} X_i$ موجود فإنَّ : $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

١٠) إن عكس المبرهنة (9) ليس صحيحاً بشكل عام أي يمكن أن يكون :

$E(X_1.X_2) = E(X_1).E(X_2)$ دون أن يكونا مستقلان عشوائياً

١١) $E(X^2) \neq \left(E(X)\right)^2$

تمرين ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية :

$$f_Y(y) = \frac{Y}{10} \; ; Y = 1,2,3,4$$

أثبت أنَّ $f_Y(y)$ دالة فعلية احتمالية ثم عيّن $E(Y(Y-5))$.

الحل

$$E(Y(Y-5)) = E(Y^2 - 5Y) = E(Y^2) - 5E(Y)$$

$$E(Y) = \sum_y Y.f_Y(y) = \sum_{y=1}^{4} Y.\left(\frac{Y}{10}\right) = \sum_{y=1}^{4} \frac{Y^2}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

أيضاً :

$$E(Y^2) = E_Y.Y^2.f_Y(y) = \sum_{Y=1}^{4} Y^2.\left(\frac{Y}{10}\right) = \sum_{Y=1}^{4} \frac{Y^3}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

فيكون $E(Y(Y-5)) = E(Y^2) - 5E(Y) = 10 - 5(3)$

العزوم

تعريف ليكن Y متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ وليكن $r \geq 1$ عدداً صحيحاً ، إذا وجد لـ Y^r توقعاً فإننا ندعوه : " العزم من المرتبة r " ، ويعطى بـ :

$$m_r := E(Y^r) = \begin{cases} \sum_y y^r.f_Y(y) & ; \text{ منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r.f_Y(y).dy & ; \text{ مستمر } Y \end{cases}$$

نلاحظ من أجل $r = 1$ نحصل على التوقع :

$$\mu = E(Y)$$

◄ **نتيجة** بما أنَّ : $|Y|^{r-1} \leq |Y|^r$ ، فهذا يعني أنَّه إذا وجد العزم من المرتبة r فإن العزوم من المرتبة الأصغر من r تكون موجودة ، "بسبب تحقق شرط التوقع"

$$E|Y^r| < +\infty \Rightarrow E|Y|^{r-1} \leq E|Y^r| < +\infty$$

تعريف العزم المركزي من المرتبة r :

وهو العزم من المرتبة r حول $\mu = \mathrm{E(Y)}$ ، ويعطى بـ :

$$E\left(Y-E(Y)\right)^r = E(Y-\mu)^r := \begin{cases} \sum_y (y-\mu)^r . f_Y(y) & ; \text{ منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\mu)^r . f_Y(y).dy & ; \text{ مستمر } Y \end{cases}$$

مثال ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) \;; & 0 < y < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عيّن $E(Y^r)$، واستنتج: $E(2Y+1)^2$.

الحل

نلاحظ أنَّ Y متغير عشوائي مستمر ، وبالتالي :

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^r . f_Y(y).dy = \int_0^1 y^r .2(1-y).dy = 2\left[\frac{y^{r+1}}{r+1} - \frac{y^{r+2}}{r+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{Y}^r) = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

$$E(2Y+1)^2 = E[4Y^2+4Y+1] = 4E(Y^2) + 4E(Y) + 1$$

$$= 4\left[\frac{2}{(2+1)(2+2)}\right] + 4\left[\frac{2}{(1+1)(1+2)}\right] + 1 = 3$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة

سنرزق ، سنسعد ، سننسى
وسنعوض بكل ما هو جميل في
يوم ما