◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة: العشرون + الواحدة والعشرون

◄ عنوان المحاضرة: المودولات الحرة

أمثلة على عناصر الفتل

١) اذا كان M فضاء شعاعي على الحقل A عندها عنصر الفتل الوحيد هو 0 .

ليكن $m \in M$ عنصر فتل عندها $\exists \alpha \in A^* : \alpha . m = 0$

بما أن A حقل فإن $\alpha^{-1} \in A$ وبالتالي نضرب من اليسار بالمقلوب α

$$\alpha^{-1}.(\alpha . m) = 0 \implies (\alpha^{-1}.\alpha).m = 0 \implies 1.m = 0 \implies m = 0$$

وبالتالي عنصر الفتل الوحيد هو 0.

ملاحظة : الفضاء الشعاعي هو حالة خاصة من المودول ولكن بأخذ حقل بدلاً من الحلقة .

(إن الضرب المعرف في تشكيل عنصر الفتل هو قانون خارجي أما قانون التشكيل في قواسم الصفر الذي مر سابقاً في مقرر البنى جبرية ٢ هو قانون داخلي)

٢) لتكن $(G\ ,\ *)$ زمرة منتهية من المرتبة n عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}^*$ عندها مهما يكن $g \in G$ فإن $\underbrace{g * g * \dots\dots * g}_{n\ \text{مرة}} = 0$ ولنعممها على المودولات .

لتكن $(G\ ,\ *)$ زمرة تبديلية منتهية من المرتبة n عدد عناصرها n (أي هي مودول على $\mathbb{Z}$) عندها حسب ما سبق

$$\forall g \in G :\ \underbrace{g \overset{\text{قانون تشكيل داخلي}}{*} g * \dots\dots * g}_{n\ \text{مرة}} = 0 \ \underset{\text{عرفناه سابقاً}}{\Longrightarrow}\ n \underset{\text{قانون تشكيل خارجي}}{.} g = 0$$

حيث $n \neq 0$ عددي طبيعي ومنه

$$\forall\ g \in G\ ;\ \exists n \in \mathbb{Z}^*\ :\ n.g = 0$$

هذا يعني أن كل عناصر الزمرة G هي عناصر فتل .

بعبارة أخرى : G زمرة تبديلية منتهية $\Leftrightarrow$ جميع عناصرها هي عناصر فتل .

ونلاحظ أن كل مجموعة تحوي عنصر فتل غير صفري تكون **غير** مستقلة خطياً وبالتالي نجد أن الزمرة G لا تملك قاعدة لان أي مجموعة جزئية في G تحوي عنصر فتل (كون كل العناصر هي عناصر فتل) ومنه فهي ليست مستقلة خطياً أي أن G لا تملك قاعدة .

أمثلة على المثال والنتيجة السابقة

١) ما هي عناصر الفتل الموجودة في الزمرة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ وهل يمكن أن تحوي مجموعة جزئية مستقلة.

إن $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ هي زمرة تبديلية منتهية وعناصرها هي $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\bar{0}$ هو عنصر فتل لان $\Leftarrow \exists 3 \in \mathbb{Z}^* \ : 3.\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

$\bar{1}$ هو عنصر فتل لان $\Leftarrow \exists 3 \in \mathbb{Z}^* \ : 3.\bar{1} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$

$\bar{2}$ هو عنصر فتل لان $\Leftarrow \exists 3 \in \mathbb{Z}^* \ : 3.\bar{2} = \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$

ومنه كل عناصر في الزمرة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ هي عناصر فتل .

- لنأخذ مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ تحوي عناصر فتل ولنثبت أنها ليست مستقلة خطياً

ولتكن $S = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ ومنه اذا كان $a.\bar{1} + b.\bar{2} = \bar{0}$ ومنه محققة من أجل $a = b = 2 \neq 0$ حيث

$$2.\bar{1} + 2.\bar{2} = \bar{0} \Rightarrow 2(1 + 3\mathbb{Z}) + 2(2 + 3\mathbb{Z}) = (2 + 3\mathbb{Z}) + (4 + 3\mathbb{Z}) = 0 + 3\mathbb{Z} = \bar{0}$$

ومنه الجملة S مستحيل أن تكون مستقلة خطياً وذلك بسبب وجود عناصر الفتل .

٢) ما هي عناصر الفتل الموجودة في الزمرة $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ وهل يمكن أن تحوي مجموعة جزئية مستقلة.

الحل : بنفس الطريقة وكل العناصر هي عناصر فتل .

ويمكن اخذ $S = \{\bar{2}, \bar{3}\}$

مبرهنة : (بدون برهان) ليكن M مودول على الحلقة A ولتكن $S \subseteq M$ مجموعة جزئية من M عندئذ

$$M \cong A^{[S]} \Leftrightarrow S \text{ قاعدة لـ } M$$

تعريف : ليكن M مودول على الحلقة A نقول عن M أنه مودول منتهي التوليد اذا تحقق ما يلي

$$\exists \underbrace{S}_{\text{مجموعة منتهية}} \subseteq M \ : \ M =< S >$$

أي اذا وجد $S \subseteq M$ مجموعة جزئية منتهية بحيث S تولد المودول M .

أمثلة : ١) ليكن $G = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ مودول على الحلقة $\mathbb{Z}$

نلاحظ ان الزمرة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ مودلة ب $\{\bar{1}\}$ أي أنه $\exists S = \{\bar{1}\} \ : \ < \bar{1} >= \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$< \bar{1} >= \{\bar{1}^1 = \bar{1}, \quad \bar{1}^2 = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}, \quad \bar{1}^3 = \bar{3}, \quad \bar{1}^4 = \bar{0}\}$$

٢) A^n مودول على A و هو مودول منتهي التوليد لأن $S = \{e_1, \dots \dots .. e_n\}$

$$= \{e_1 = (1,0, \dots ..,0), \dots \dots .., e_n = (0,0, \dots \dots ,1)\}$$

بسبب وجود المجموعة المنتهية S والتي تولد A^n .

٣) A مودول على نفسها وإن A مودول منتهي التوليد لأن $A =< 1 >$

٤) $\mathbb{Z}$ مودول على $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z} =< 1 >$ ومنه $\mathbb{Z}$ مودول منتهي التوليد .

ملاحظة : من الآن فصاعدا نشترط أن A هي حلقة تبديلية رئيسية أي

1) تبديلية 2) منطقة تكاملية (لاتحوي قواسم الصفر)

3) رئيسية أي كل مثالي I في A هو مثالي رئيسي له الشكل :

$$a \in A \ : \ I =< a > = (a) = a.A = \{a.\varphi \ : \ \varphi \in A\}$$

- مثال $\mathbb{Z}$ هي حلقة تبديلية رئيسية كون

$$I = m\mathbb{Z} = (m) \ : \ m \in N$$

- إن حلقة الحدوديات $R[X]$ حيث R حقل هي حلقة تبديلية رئيسية .
- $\mathbb{Z}[X]$ ليست حلقة تبديلية رئيسية .

تعريف ((حقل القسمة)) : لتكن A حلقة (أي يجب أن تحقق الشروط السابقة) عندئذ :

$$F_r(A) = \{\frac{a}{b} \ ; \ a, b \in A \ ; \ b \neq 0\}$$

يدعى بحقل القسمة ل A

- مثال اذا كان لدينا $A = \mathbb{Z}$ فإن

$$F_r(\mathbb{Z}) = \left\{\frac{a}{b} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z} \ ; \ b \neq 0\right\} = \mathbb{Q}$$

تعريف المودول الحر : ليكن M مودول منتهي التوليد معرف على الحلقة A عندئذ نقول عن M أنه مودول حر إذا وفقط اذا وجدت قاعدة منتهية له .

أمثلة :

١) إن A^n هو مودول منتهي التوليد وهو حر لان $S = \{e_1, \dots . . e_n\}$ تشكل قاعدة منتهية ل A^nعلى A

٢) إن المودول $\mathbb{Z}$ هو مودول منتهي التوليد لان $\mathbb{Z} =< \{1\} >$ أي أن $S = \{1\}$ مجموعة مولد ل $\mathbb{Z}$ وهي مستقلة خطياً اذاً S قاعدة ل $\mathbb{Z}$ ومنتهية وبالتالي $\mathbb{Z}$ مودول حر .

ملاحظة : ليكن M مودول حر عندها $\exists \underbrace{S}_{\text{مجموعة جزئية منتهية}} \subseteq M$ بحيث S قاعدة ل M.

بحيث عدد عناصرها n أي أن $S = \{S_1, S_2, \dots \dots \dots, S_n\}$ قاعدة ل M فإن $M \cong A^n$

وذلك حسب المبرهنة السابقة

وجدنا سابقاً أن $\mathbb{Z}$ مودول حر ومنه $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^1$ (ال 1 هو عدد عناصر القاعدة).

وايضاً A^n مودول حر ومنه $A^n \cong A^n$.

ملاحظة: إن رتبة مودول حر M على الحلقة A نرمز لها بالرمز $rg_A(M)$ وهو يشبه مفهوم بعد فضاء شعاعي .

مناقشة : ليكن لدينا M مودول حر على الحلقة A اذاً

$$\exists S = \{S_1, S_2, \dots \dots \dots, S_n\} \subseteq M$$

بحيث S قاعدة ل M اذا

$$M \cong A^n$$

وأيضا يوجد تماثل $\varphi : M \longrightarrow A^n$ إذا $\{\varphi(S_1), \dots \dots . . , \varphi(S_n)\}$ هي قاعدة لـ A^n .

(أخذنا صورة القاعدة S وفق التطبيق φ وبالتالي صورتها هي قاعدة للمستقر).

لنفرض $S' = \{x_1, \dots . . . x_m\}$ مجموعة جزئية من M بحيث S' تشكل قاعدة ل M أي ان S' مولدة و مستقلة ل M وبالتالي فإن $\{\varphi(x_1), \dots \dots . . , \varphi(x_m)\}$مجموعة مولدة لـ A^n

(ذلك لان صورة مجموعة مولدة هي مجموعة مولدة)

إذا هي مولدة للفضاء الشعاعي K^n حيث K هو حقل القسمة لـ A $\quad F_r(A) = K$

ونعلم في الفضاءات الشعاعية أن المجموعة المولدة عدد عناصر أكبر أو يساوي عدد عناصر القاعدة أي أن $n \leq m \quad (1) \dots$

ومن جهة أخرى S' مجموعة مستقلة (حرة) لـ M عندئذ حسب φ تماثل تكون المجموعة $\{\varphi(x_1), \dots \dots, \varphi(x_m)\}$ مستقلة (حرة) لـA^n إذا هي مستقلة حرة لـ K^n

ونعلم في الفضاءات الشعاعية عدد العناصر المستقلة أصغر أو يساوي عدد عناصر القاعدة

$$(2) \dots\dots n \geq m$$

وبالتالي من $(1),(2)$ نجد أن : $n = n$

إذا عدد عناصر القاعدة لـ M = عدد عناصر أية قاعدة لـ M

ونرمز لعدد عناصر القاعدة بالرمز: $rg(M) = n$.

ملاحظة : إن المولد ل K^n هو نفسة المولد ل A^n لان

$$u \in K^n \implies \exists d \in A \ : u = \frac{v}{d} \quad : v \in A^n$$

بما أن $v \in A^n$ فإنه يكتب كتركيب خطي بدلالة المولدة $\{\varphi(x_1), \dots \dots, \varphi(x_m)\}$

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(x_i) \implies u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\varphi(x_i)}{d}$$

تطبيق على ذلك $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \in Q^2 \implies \exists\, 6 \in Z \ : \ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(3,2)$

حيث 6 مضاعف مشترك أصغر للمقامين .

نتيجة : اذا كان M مودول حر على الحلقة A أي أن $M \cong A^n$ فأي قاعدة ل M يجب أن تحوي n عنصر وندعو ذلك العدد n برتبة المودول M ونرمز له بالرمز $rg_A(M)$.

مثال : $\mathbb{Z}$ مودول على $\mathbb{Z}$ و هو مودول حر وقاعدته $S = \{1\}$ وبالتالي $rg_A(\mathbb{Z}) = 1$

ملاحظة : نعلم أن في الفضاء الشعاعي أن قاعدة فضاء شعاعي هي مجموعة مولدة صغرى وكذلك قاعدة فضاء شعاعي هي مجموعة مستقلة عظمى لكن هذه المعلومة غير موجودة في المودولات .

مثال : $\mathbb{Z}$ مودول حر على $\mathbb{Z}$ يملك قاعدة $S = \{1\}$

- إن $\{2\}$ مستقلة خطياً (لان $a.2 = 0 \Rightarrow a = 0$) وكذلك $\{2\}$ مستقلة عظمى لان لو اخذنا مجموعة عدد عناصرها اكثر من 1 مثال $\{2, m\}$ حيث $m \neq 2\ ,\ m \neq 0$ تكون مرتبطة خطياً لان $\big((-m).2 + (2)(m) = 0\big)$

حيث $m \neq 0\ , -m \neq 0$
اذاً $\{2\}$ مستقلة عظمى ولكن لا تشكل قاعدة لانها غير مولدة ل $\mathbb{Z}$ حيث لا تولد الاعداد الفردية

- إن $\{2,3\}$ مولدة ل $\mathbb{Z}$ لان

$$\underbrace{b}_{\text{يكتب كتركيب خطي } b} \in \mathbb{Z} : \quad b = (-b).2 + (b).3$$

وكذلك $\{2,3\}$ مولدة صغرى لان $\{2\}$ لا تولد $\mathbb{Z}$ ولان $\{3\}$ لا تولد $\mathbb{Z}$

مما سبق نجد أن $\{2,3\}$ مولدة صغرى الا انها ليست قاعدة وذلك لانها غير مستقلة حيث

$$(-3).2 + (2).3 = 0$$

<u>نعلم أن في الفضاء الشعاعي بعد أي فضاء جزئي فعلي منه أصغر من بعد الفضاء ولكن هذه المعلومة غير صحيحة في المودولات .</u>

<u>مثال :</u> لتكن $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ مودول حر قاعدته $\{1\}$ وكذلك $2\mathbb{Z}$ مودول حر قاعدته $\{2\}$ وبالتالي يكون

$$rg(2\mathbb{Z}) = 1 \quad , \quad rg(\mathbb{Z}) = 1$$

رغم أن $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

<u>مبرهنة :</u> ليكن M, N مودولين على الحلقة A ولنفرض أن M مودول حر رتبته $rg_A(M) = m$

وكذلك N مودول حر رتبته $rg_A(N) = n$ عندها $M \oplus N$ مودول حر و $rg_A(M \oplus N) = m + n$.

البرهان :

لدينا M مودول حر و $rg_A(M) = m$ اذا توجد $\{e_1, \ldots\ldots, e_m\}$ قاعدة ل M
و لدينا N مودول حر و $rg_A(N) = n$ اذا توجد $\{f_1, \ldots\ldots, f_n\}$ قاعدة ل N

وبالتالي $\{(e_i, 0), (0, f_j) :\ i = 1, \ldots, m\ ;\ j = 1, \ldots, n\}$ قاعدة منتهية ل $M \oplus N$

ومنه $M \oplus N$ مودول حر(لان القاعدة منتهية) و $rg_A(M \oplus N) = rg_A(M) + rg_A(N) = m + n$

مبرهنة : كل مودول منتهي التوليد (أي يملك مجموعة منتهية مولدة لها) يماثل مودول الخارج (القسمة) لمودول حر معين .

البرهان :

ليكن M مودول منتهي التوليد على A ومنه يوجد مجموعة منتهية ولتكن $T = \{m_1, m_2, \dots \dots \dots, m_n\}$ مولدة ل M ولنبني العلاقة

$$\varphi : \mathrm{A}^n \longrightarrow M$$

$$(a_1, \dots \dots, a_n) \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i . m_i$$

- φ تطبيق وتشاكل (وظيفة) $\lambda_1, \lambda_2 \in A \quad , \quad \forall (a_1, \dots \dots, a_n), (b_1, \dots \dots, b_n) \in A^n$
$: \ (a_1, \dots \dots, a_n) = (b_1, \dots \dots, b_n)$

بما أن T مولدة ل M فإنه

$$m \in M \ \Longrightarrow \exists a_1, \dots \dots, a_n \in A \ : \quad m = a_1 m_1 + \cdots \dots + a_n m_n$$
$$\Longrightarrow (a_1, \dots \dots, a_n) \in A^n$$

وأن

$$m' \in M \ \Longrightarrow \exists b_1, \dots \dots, b_n \in A \ : \quad m' = b_1 m_1 + \cdots \dots + b_n m_n$$
$$\Longrightarrow (b_1, \dots \dots, b_n) \in A^n$$

ولكن $(b_1, \dots \dots, b_n) = (a_1, \dots \dots, a_n)$ ومنه

$$a_1 m_1 + \cdots \dots + a_n m_n = b_1 m_1 + \cdots \dots + b_n m_n$$

$$\Longrightarrow \varphi(a_1, \dots \dots, a_n) = \varphi(b_1, , , , , , b_n)$$

وبالتالي φ تطبيق ولنثبت انه تشاكل

$$\varphi\big(\lambda_1 (a_1, \dots \dots, a_n) + \lambda_2 (b_1, , , , , , b_n)\big) = \varphi\big((\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_1 a_n) + (\lambda_2 b_1, \dots, \lambda_2 b_n)\big)$$

$$= \varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, , , , , , , , , \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)$$

$$= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1). m_1 +, , , , , , +(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n). m_n$$

$$= (\lambda_1 a_1 m_1 + \lambda_2 b_1 m_1) +, , , , , , +(\lambda_1 a_n m_n + \lambda_2 b_n m_n)$$

$$= (\lambda_1 a_1 m_1 +,,,,,,,, +\lambda_1 a_n m_n) + (\lambda_2 b_1 m_1 +,,,,, +\lambda_2 b_n m_n)$$

$$= \lambda_1 (a_1 m_1 +,,,,,,,, +a_n m_n) + \lambda_2 (b_1 m_1 +,,,,, +b_n m_n)$$

$$= \lambda_1 \varphi(a_1, \dots \dots, a_n) + \lambda_2 \varphi(b_1,,,,,, b_n)$$

وبالتالي φ تشاكل .

- φ غامر لان T مولدة

$$m \in M \implies \exists b_1,,,,,, b_n \in A \ : \quad m = b_1 m_1 + \ \dots\dots + b_n m_n$$

اذاً يوجد $(b_1,,,,,, b_n) \in\in A^n$ بحيث

$$\varphi(b_1,,,,,, b_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i . m_i = m$$

ومنه φ تشاكل مودولي غامر اذا حسب مبرهنة التماثل الأولى يكون

$$\frac{A^n}{ker\varphi} \cong M$$

بملاحظة A^n مودول حر نجد المطلوب .

مبرهنة : ليكن M مودول منتهي التوليد وليكن N مودول جزئي منه عندها المودول M/N منتهي التوليد .

البرهان :

لنفرض $S = \{m_1,,,,,, m_r\}$ مولدة ل M عندها $S' = \{m_1 + N,,,,,, m_r + N\}$ مجموعة جزئية من M/N و مولدة ل M/N لان

$$m \in M \quad \implies \exists a_1, \dots \dots, a_r \in A \ : \quad m = a_1 m_1 + \cdots \dots + a_r m_r$$

$$m + N = (a_1 m_1 +,,,,,, +a_r m_r) + N = a_1 (m_1 + N) +,,,, +a_r (m_r + N)$$

ومنه S' مولدة ل M/N ومنتهية أي أن M/N مودول منتهي التوليد .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي