◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : الثالثة والعشرون والرابعة والعشرون والاخيرة

◄ عنوان المحاضرة : المبرهنة الأساسية في المودولات الحرة

المبرهنة الأساسية في المودولات الحرة

ليكن M مودول حر على الحلقة A ونرمز بـ $rg_A(M) = r$ وليكن $\grave{M}$ مودول جزئي من M عندها $\grave{M}$ مودول حر وتوجد $\{e_1, \dots \dots, e_r\}$ قاعدة لـ M و يوجد $a_1, \dots \dots a_{\grave{r}}$ من A بحيث $a_1|a_2| \dots \dots .|a_{\grave{r}}$ و $\grave{r} = rg_A(\grave{M}) \leq r$ بحيث $\{a_1.e_1, \dots \dots a_{\grave{r}}.e_{\grave{r}}\}$ قاعدة لـ$\grave{M}$ حيث $\grave{r} = rg_A(\grave{M}) \leq r$.

ملاحظة : $a_1|a_2| \dots \dots .|a_{\grave{r}}$ تعني a_1 تقسم a_2 و هكذا .

<u>(سوف نقوم ببرهان بعض التمهيديات التي ستساعدنا في البرهان المطلوب)</u>

البرهان

- هل يمكن دراسة المبرهنة من اجل $\boldsymbol{M = A^r}$ (وبالتالي نثبتها من اجل $\boldsymbol{A^r}$ وهذا اسهل من برهانها من اجل $\boldsymbol{M}$).(بعبارة أخرى لنفرض ان المبرهنة صحيحة من اجل $\boldsymbol{M = A^r}$ أي $\boldsymbol{A^r}$ تحقق المبرهنة ولنرى هل تبقى صحيحة لاجل أي مودول حر M).

الجواب : نعم لان لدينا M مودول حر رتبته r ومنه $M \cong A^r$ أي يوجد

$\emptyset : M \longrightarrow A^r$ تماثل

لدينا $\grave{M}$ مودول جزئي من M ومنه $\emptyset(\grave{M})$ مودول جزئي من A^r اذا تم برهان المبرهنة لاجل $M = A^r$ عندها $\emptyset(\grave{M})$ مودول حر و $\grave{r} = rg_A\left(\emptyset(\grave{M})\right) \leq r$ و توجد $\{e_1, \dots \dots, e_r\}$ قاعدة ل A^r وتوجد $a_1, \dots \dots a_{\grave{r}} \in A$ بحيث $a_1|a_2| \dots \dots .|a_{\grave{r}}$ و $\{a_1.e_1, \dots \dots a_{\grave{r}}.e_{\grave{r}}\}$ قاعدة ل $\emptyset(\grave{M})$ عندئذ بأخذ $\emptyset^{-1}$ نجد المطلوب أي توجد $\{\emptyset^{-1}(e_1), , , , , , , , , , , \emptyset^{-1}(e_{\grave{r}})\}$ قاعدة ل M ويوجد $a_1, \dots \dots a_{\grave{r}} \in A$ بحيث $a_1|a_2| \dots \dots .|a_{\grave{r}}$ وبالتالي $\{\underbrace{a_1\emptyset^{-1}(e_1)}_{\emptyset^{-1}(a_1e_1)}, , , , , , , , , a_{\grave{r}}\emptyset^{-1}(e_{\grave{r}})\}$ قاعدة ل $\grave{M}$. ومنه يكفي برهان المبرهنة لاجل $\boldsymbol{M = A^r}$.

وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة لاجل أي مودول M .

- لدينا $\grave{M}$ مودول جزئي من M وليكن $V \in Hom(M,A)$ ومنه $V(\grave{M}) \subset A$ مودول جزئي من الحلقة A اذاً $V(\grave{M})$ مثالي في A ولكن A حلقة تبديلية رئيسية اذاً $V(\grave{M})$ مثالي رئيسي ونرمز للمولد ب $a_V \in A \quad : \quad V(\grave{M}) = (a_V)$ ولنأخذ مجموعة كل المثاليات الرئيسية $V(\grave{M})$ حيث $V \in Hom(M,A)$ ونرمز لها بـ I إن I مجموعة جزئية من الحلقة A التبديلية الرئيسية (وحسب مبرهنة سابقة كل حلقة رئيسية تبديلية هي حلقة نوثرية) اذاً I مجموعة مثاليا في الحلقة النوثرية A فإنها تحقق الشرط الاعظمي أي أن I تملك عنصراً أعظمياً (بالنسبة للاحتواء) ولنرمز له ب

$$(a_u) = u(\grave{M}) \quad : \quad u \in Hom(M,A)$$

إن $(a_u) = u(\grave{M})$ ومنه فإن $\exists c \in \grave{M}: \ u(c) = a_u$

سنبرهن أن مهما يكن $V \in Hom(M,A)$ فإن $a_u = u(c) \mid V(c)$ لان $a_u = u(c)\ ,\ V(c)$ عنصرين من A فإن $d = gcd\left(a_u\ ,V(c)\right)$ ومنه يوجد $\alpha, \beta \in A$ بحيث

$$d = \alpha.a_u + \beta.V(c)$$

$$d = \alpha u(c) + \beta V(c) = (\underbrace{\alpha u + \beta V}_{W})(c)$$

إذا نجد أن $W = \alpha u + \beta V$ عنصر من $Hom(M,A)$ وبالتالي

$$\Longrightarrow d = W(c) \ \in W(\grave{M}) = (a_W)$$

$$d \in (a_W) \ \Longrightarrow a_W \mid d$$

وكذلك $d|V(c)$ و $d|a_u$ حسب تعريف gcd ومنه $a_W|d|a_u$ وبالتالي $a_W|a_u$

ومنه $(a_u) \subseteq (a_W)$

) لان $a_W|a_u$ أي ان $\alpha \in A \ : \ a_u = a_W.\alpha$ عندئذ لنفرض أن $x \in (a_u)$ أي

$$(\quad x = a_u.\underbrace{\beta}_{\in A} = a_W.\underbrace{\alpha.\beta}_{\in A} \Longrightarrow x \in (a_W)$$

ولكن (a_u) مثالي أعظمي اذاً $(a_u) = (a_W)$ اذاً $a_W \in (a_u)$ وبالتالي $a_u|a_W$

ومنه $a_u|a_W|d|V(c)$ اذاً $a_u|V(c)$ وذلك مهما يكن $V \in Hom(M,A)$
لنأخذ $V = Pr_1$ ومنه $b_1 \in A \ : \ P_{r_1}(c) = a_u b_1 \Longrightarrow a_u|P_{r_1}(c)$

وهكذا باخذ $V = P_{r_i}$ نحصل على $b_i \in A$: $P_{r_i}(c) = a_u b_i$ وبالتالي

$$c = (a_u b_1, a_u b_2, , , , , , , , a_u b_r) = a_u(b_1, , , , , , , b_r)$$

لنرمز ب c' للعنصر $(b_1, , , , , , , b_r) \in A^r$ ومنه $c = a_u . c'$ وكذلك لنأخذ u للطرفين

$$u(c) = u(a_u . c')$$

وبالتالي $a_u = a_u . u(c')$ أي أن $u(c') = 1$

- لنثبت أن

$$M = A.c' \oplus keru \qquad (1)$$
$$\grave{M} = A.c \oplus \left(keru \cap \grave{M}\right) \qquad (2)$$

لنثبت (1) أي أن $M = A.c' + keru$ وايضاً $A.c' \cap keru = 0$

$$m \in M \implies m = \underbrace{u(m).c'}_{\in Ac'} + (m - u(m).c')$$

وليتم المطلوب لنبرهن أن $m - u(m).c' \in keru$

$$u(m - u(m).c') \underbrace{=}_{u \text{ تشاكل}} u(m) - u(m).u(c') = u(m) - u(m).1 = 0$$

$\Leftarrow M \subseteq Ac' + keru$ والاحتواء الاخر محقق كون $Ac', keru$ مودولات جزئية من M

ومنه $M = Ac' + keru$

وأن $Ac' \cap keru = 0$

ليكن $x \in Ac' \cap keru \Longrightarrow \begin{cases} x \in Ac' \\ x \in keru \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha . c' \; ; \; \alpha \in A & (\grave{1}) \\ \quad u(x) = 0 & (\grave{2}) \end{cases}$

$$\Longrightarrow 0 = u(x) = u(\alpha . c') = \alpha u(c') = \alpha . 1 = 0$$

وذلك لان A منطقة تكاملية $1 \neq 0$ ومنه $\alpha = 0$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \Longrightarrow M = Ac' \oplus keru$$

لنثبت (2) أي أن $\grave{M} = A.c + \left(keru \cap \grave{M}\right)$ وايضاً $A.c \cap \left(keru \cap \grave{M}\right) = 0$

$$\grave{m} \in \grave{M} \implies \grave{m} = u(\grave{m}).c' + (m' - u(\grave{m}).c')$$

لنبرهن أن $u(\grave{m}).c' \in A.c$

$$u(\grave{m}).c' \overset{\text{حسب } *}{=} \alpha.a_u.c' = \alpha.c \in A.c \; ; \; \alpha \in A$$

(حيث(*) هي $u(\grave{m}) \in u\left(\grave{M}\right) = (a_u) \Leftarrow u(\grave{m}) \in (a_u) \Leftarrow u(\grave{m}) = \alpha.a_u \,:\, \alpha \in A$)

$$\implies u(\grave{m}).c' \in Ac$$

لنبرهن أن $(m' - u(\grave{m}).c') \in \grave{M} \cap keru$

$$m' - u(\grave{m}).c' = m' - \alpha.a_u.c'$$

وذلك لان $u(\grave{m}) \in u\left(\grave{M}\right) = (a_u) \implies u(\grave{m}) = \alpha a_u \; : \alpha \in A$

ومنه $m' - u(\grave{m})c' = \underbrace{m'}_{\in M'} - \underbrace{\alpha}_{\in A}\underbrace{c}_{\in M'} \in M'$

$$= \underbrace{m}_{\in M'} - \underbrace{\alpha}_{\in A}\underbrace{a_u}_{\in M'} \in M'$$

وايضاً $(m' - u(\grave{m}).c') \in keru$ لان

$$u(\grave{m} - u(\grave{m}).c') = u(\grave{m}) - u(\grave{m}).u(c') = u(\grave{m}) - u(\grave{m}).1 = 0$$

$\Longleftarrow \grave{M} \subseteq Ac + \left(\grave{M} \cap keru\right)$ والاحتواء الاخر محقق أي ان $\grave{M} = Ac + \left(\grave{M} \cap keru\right)$

وأن $A.c \cap \left(keru \cap \grave{M}\right) = 0$

ليكن $x \in Ac \cap \left(keru \cap \grave{M}\right) \implies \begin{cases} x = \beta.c \; ; \; \beta \in A \\ x \in \grave{M} \\ u(x) = 0 \end{cases}$

ومنه

$$0 = u(x) = u(\beta.c) = \beta.u(c) = \beta u(a_u.c') = \beta a_u.u(c') = \beta.a_u$$

A هي منطقة تكاملية وأن $a_u \neq 0$ لانه مولد مثالي اعظمي اذاً $\beta = 0$ ومنه $x = 0$

$$\implies \grave{M} = Ac \oplus (\grave{M} \cap keru)$$

- لنبرهن أن M' مودول حر حيث أن رتبته r' .

لبرهان بالاستقراء الرياضي حسب الرتبة

- لنفرض أن $\boldsymbol{r' = 0}$ أي ليس له قاعدة اذاً M' حر لان المودول هو المودول الصفري أي $M' = 0$

اذا كان $\boldsymbol{r' > 0}$ عندها حسب الاستقراء الرياضي لنفرض صحة المبرهنة لاجل المودولات الجزئية من $\boldsymbol{M}$ والتي رتبتها $\boldsymbol{r' - 1}$ ولنبرهن من اجل المودولات الجزئية M والتي رتبتها r'

ومنه
$$\underbrace{\grave{M}}_{r' \text{رتبته}} = \underbrace{Ac}_{Ac \text{ مولد ب} \{c\} \text{ وهي مستقلة اي رتبته } 1} \oplus \underbrace{(keru \cap \grave{M})}_{\text{حسب مبرهنة سابقة رتبته } r'-1}$$

ومنه حسب الفرض الاستقراء فإن $keru \cap \grave{M}$ مودول حر وبالتالي $\underbrace{Ac}_{\text{حر لان رتبته } 1} \oplus \underbrace{(keru \cap \grave{M})}_{\text{حر}}$

أي أن M' مودول حر .

- إيجاد قاعدة مناسبة لنبرهن ذلك بالاستقراء الرياضي على r
  - $r = 0$ يتم المطلوب
  - $r > 0$ ولنفرض صحة المبرهنة لأجل المودولات M التي رتبتها $r - 1$

لدينا $keru$ مودول رتبته $r - 1$ لان

$$\underbrace{M}_{r \text{ رتبته}} = \underbrace{Ac'}_{1 \text{ رتبته}} \oplus \Big(\overbrace{keru}^{\text{حسب مبرهنة سابقة رتبته } r-1} \Big)$$

$$M' = Ac \oplus (keru \cap \grave{M})$$

و لان $\grave{M} \cap keru$ مودول جزئي من $keru$ اذا حسب الفرض الاستقراء توجد قاعدة $\{e_2, \ldots\ldots, e_r\}$ ل $keru$.

فإنه يوجد $a_2, \ldots\ldots\ldots, a_{r'} \in A$ بحيث $a_2 | \ldots\ldots\ldots | a_{r'}$ حيث

$\{a_2 . e_2, \ldots\ldots a_{r'} . e_{r'}\}$ قاعدة ل $\grave{M} \cap keru$

لنفرض أن : $a_1 = a_u$, $e_1 = c'$ عندها $\{e_1 = c', e_2, \ldots\ldots, e_r\}$ قاعدة لـ M وأن

$\{a_1 e_1 = a_u c' = c, a_2 . e_2, \ldots\ldots a_{r'} . e_{r'}\}$ تشكل قاعدة ل M' .

وكي يتم المطلوب يجب أن نبرهن أن $a_1 = a_u | a_2$ لاجل ذلك ليكن لدينا لنأخذ $V \in Hom(M, A)$

$$V(e_1) = 1 \quad , \qquad V(e_2) = 1 \qquad , \quad V(e_i) = 0 \quad ; i \geq 3$$

ومنه : $V(c) = V(a_u . c') = a_u V(c') = a_u . V(e_1) = a_u . 1 = a_u$

$$\Longrightarrow a_u = V(c) \in V(\grave{M}) \Longrightarrow a_u \in V(\grave{M}) = (a_V) \Longrightarrow a_V | a_u$$

ومنه $(a_u) \subseteq (a_V)$

ولكن (a_u) أعظمي اذاً $(a_V) = (a_u)$ وكذلك $V(a_2 . e_2) = a_2 V(e_2) = a_2$

$$a_2 = V\left(\underbrace{a_2 . e_2}_{\in M'}\right) \in V(M') = (a_V)$$

ومنه $a_2 \in (a_V)$ مماسبق نجد أن $(a_V) = (a_u)$ ومنه $a_2 \in (a_V) = (a_u)$ ومنه $a_1 = a_u | a_2$

<u>وبذلك يتم المطلوب</u>

((انتهى البرهان))

تطبيقات المبرهنة

نتيجة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية التوليد عندها :

$$G \cong \underbrace{\frac{\mathbb{Z}}{a_1 \mathbb{Z}} \times \dots \dots \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{a_t \mathbb{Z}}}_{\text{قسم الفتل}} \times \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{قسم الحر}}$$

بحيث $a_1, \dots \dots, a_t \in \mathbb{N}^*$ و $a_1 | \dots \dots \dots | a_t$

و $r \geq 0$ وكذلك : $Tor(G) = \frac{\mathbb{Z}}{a_1 \mathbb{Z}} \times \dots \dots \dots \times \frac{\mathbb{Z}}{a_t \mathbb{Z}}$ وأيضاً $ord\left(Tor(G)\right) = a_t \mathbb{Z}$

<u>مثال :</u> عين جميع الزمر التبديلية التي عدد عناصرها $n = 720 = 2^4 . 3^2 . 5$

الحل

نلاحظ أن الزمر التبديلية يجب ان تكون منتهية عدد عناصرها 720 وبالتالي لن يكون لدينا قسم حر.

نأخذ اكبر أس وهو 4 وبالتالي على الأكثر سيكون لدينا 4 حدود

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{a_1\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_4\mathbb{Z}}$$

حيث : $a_1 | \dots \dots . . | a_4$ ولندرس جميع الاحتمالات الممكنة حسب الجدول:

قوى 5	1	0	0	0	* &
قوى 3	2	0	0	0	* &
	1	1	0	0	
قوى 2	4	0	0	0	*
	3	1	0	0	
	2	2	0	0	
	2	1	1	0	
	1	1	1	1	&

نأخذ سطر من قوى 5 و سطر من قوى 3 وسطر من قوى 2 نجد أن :

$$(*) \ : \ G \cong \frac{\mathbb{Z}}{5.3^2.2^4\mathbb{Z}}$$

$$(\&) : \ G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5.3^2.2\mathbb{Z}}$$

إن * و & هي امثلة عن الزمر التبديلية والمطلوب هو جميع الزمر التبديلية أي نأخذ جميع الحالات .

ملاحظة في الامتحان اذا كان عدد الزمر التبديلية كبير فيتم طلب جزء منها وليس جميعها .

وظيفة : عين جميع الزمر التبديلية التي عدد عناصرها $n = 108 = 2^2.3^3$

الحل

نأخذ اكبر أس وهو 3 وبالتالي على الأكثر سيكون لدينا 3 حدود

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{a_1\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_3\mathbb{Z}}$$

حيث : $a_1 | \dots \dots . . | a_3$ ولندرس جميع الاحتمالات الممكنة حسب الجدول:

قوى 2	2	0	0	رقم السطر 1
	1	1	0	رقم السطر 2
قوى 3	3	0	0	رقم السطر 3
	2	1	0	رقم السطر 4
	1	1	1	رقم السطر 5

ولنأخذ الزمر التالية

نأخذ السطر 1,3 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2^2.3^3\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 2,3 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2.3^3\mathbb{Z}}$
نأخذ السطر 1,4 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2.3^2\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 2,4 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2.3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2.3^2\mathbb{Z}}$
نأخذ السطر 1,5 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2.3\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 2,5 فنجد : $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2.3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2.3\mathbb{Z}}$

وظيفة : عين جميع الزمر التبديلية التي عدد عناصرها $n = 2^5$.

الحل

نأخذ اكبر أس وبالتالي لدينا 5 حدود على الأكثر أي :

$$G \cong \frac{\mathbb{Z}}{a_1\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{a_5\mathbb{Z}}$$

حيث : $a_1 | \dots\dots\dots | a_5$ ولندرس جميع الاحتمالات الممكنة حسب الجدول:

قوى 2	5	0	0	0	0	رقم السطر 1
	4	1	0	0	0	رقم السطر 2
	3	2	0	0	0	رقم السطر 3
	3	1	1	0	0	رقم السطر 4
	2	1	1	1	0	رقم السطر 5
	1	1	1	1	1	رقم السطر 6

ولنأخذ الزمر التالية

نأخذ السطر 1 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2^5\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 4 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^3\mathbb{Z}}$
نأخذ السطر 2 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^4\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 5 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}}$
نأخذ السطر 3 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^3\mathbb{Z}}$	نأخذ السطر 6 $G \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

مبرهنة بدون برهان : ليكن M مودول فتل منتهي التوليد عندها اذا كان

$$ord(M) = \Big(\underbrace{P_1^{\alpha_1} \dots\dots\dots P_r^{\alpha_r}}_{\text{تحليل العدد الى عوامل الاولية}}\Big) \text{ عندها } M = T(P_1) \oplus \dots\dots\dots \oplus T(P_r)$$

حيث $T(P_i) = \{x \in M \ ; \ P_i^{\alpha_i}x = 0\}$ مودولات جزئية من M وهي مودولات P_i أولي .

حيث $i = 1,,,,,,r$.

مثال ١) اكتب الزمرة التبديلية $G = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{45\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2700\mathbb{Z}}$ على شكل مجموع مباشر لمقاطع $T(P_i)$.

الحل

$$ord(G) = 2700\mathbb{Z} = 2^2.3^3.5^2\mathbb{Z} \qquad G = T(2) \oplus T(3) \oplus T(5)$$

$$3 = 3.1 \quad , \quad 45 = 3^2.5 \quad , \quad 2700 = 2^2.3^3.5^2$$

$$T(2) = \{x \in G : 2^2.x = 0\} = \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \qquad T(3) = \{x \in G : 3^3.x = 0\} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^3\mathbb{Z}}$$

$$T(5) = \{x \in G : 5^2.x = 0\} = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^2\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow G = \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5^2\mathbb{Z}}$$

مثال ٢) هل الزمر التالية متماثلة

١) $H_1 = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}} \quad , \quad H_2 = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$

٢) $H_3 = \frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}} \quad , \quad H_1$

الحل

١) $36 = 2^2.3^2 \quad , \quad 6 = 2.3 \quad , \quad 18 = 2.3^2 \quad , \quad 12 = 2^2.3$

$$H_1 \cong H_2 \Leftarrow \begin{cases} H_1 = T(2) \oplus T(3) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \\ H_2 = \grave{T}(2) \oplus \grave{T}(3) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \end{cases}$$

٢) $24 = 2^3.3 \quad , \quad 9 = 3^2$

$$H_3 = T(2) \oplus T(3) = \frac{\mathbb{Z}}{2^3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3^2\mathbb{Z}} \Rightarrow \boldsymbol{H_1 \ncong H_3}$$

انتهت المحاضرة

نعتذر عن ورود بعض الأخطاء

الصواب	الخطأ	المكان
$\bigcap_{i\in I} M_i = \{ x : x \in M_i ;\ \forall i \in I \}$	$\bigcap_{i\in I} M_i = \{ x : x \in m_i ;\ \forall i \in I \}$	المحاضرة 2 الصفحة 4
$\alpha_1 = \alpha_2 =,,,,,,,,= \alpha_n = 0$	$\alpha_1 = \alpha_2 =,,,,,,,,= \alpha_n$	المحاضرة 3 الصفحة 2
إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom_A(N, M_i)$	إنَّ δ تقابل لأنَّ: ليكن $\forall (g_i)_{i\in I} \in Hom_A(N, M_i)$	المحاضرة 12 الصفحة 3
لتكن A حلقة عندئذ نرمز لـ $\prod_{i\in I} A$ (الجداء الديكارتي لـA بنفسها I مرة) ونرمز لها ب $\boldsymbol{A^I}$.	لتكن A حلقة عندئذ نرمز لـ $\prod_{i\in I} A$ (الجداء الديكارتي لـA بنفسها I مرة) ونرمز لها ب $A^{[I]}$.	المحاضرة 19 الصفحة 4
وبالتالي من $(1),(2)$ نجد أن : $n = m$	وبالتالي من $(1),(2)$ نجد أن : $n = n$	المحاضرة 20 الصفحة 5

اليكم الان التمارين المطلوبة من الكتاب

الفصل الاول	المحلولة كلها + غير المحلولة ١+٥+٦
الفصل الثاني	مثال ١+٢ الصفحة ٤٨ + المحلولة ١+٢+٣+٤ غير المحلولة : ١+٢+٣+٤+٥
الفصل الثالث	المحلولة ١+٢+٣+٤ , غير المحلولة ١+٢
الفصل الرابع	المحلولة ١ ($M = M_1 \oplus M_2$ متكاملين) +٤+٥+٦ غير المحلولة ١+٢
الفصل الخامس	غير مطلوب أي شيء
الفصل السادس	المحلولة ١+٢ , غير المحلولة ٢

بهذا نكون قد انتهينا من مقررنا نعتذر عن ورود أي خطأ ونذكر أنه يجب ذكر أي نص مبرهنة قد يستخدم في برهان أي مبرهنة

بالتوفيق للجميع

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو النوت – شهد الحايك البوشي