الاربعاء ١٩ صفر ١٤٣٩ هـ

٨ تشرين ٢٠١٧ م

المحاضرة الثانية عشرة

اثبات المبرهنة (٢٢)

[١] $N(R/Q) = \frac{\sqrt{Q}}{Q} \trianglelefteq R$ وحيث انه تقاطع المثاليات الاعظمية

$(R/Q, \sqrt{Q}/Q)$ محلية عندئذ محلية $R/Q = U(R/Q) \cup N(R/Q)$

$\bar{b} \in R/Q$ zero divizor $\Rightarrow \bar{b} \notin U(R/Q)$

$\Rightarrow \bar{b} \in N(R/Q)$

عندئذ Q هي P-Primary.

[٢] حسب [١] ان $\sqrt{Q} = \sqrt{y^n} = y \trianglelefteq R$

عندئذ y^n هو y-primary

[٣] Q هي p-primary و $a \in R/Q$ فان (Q, a) هو p-primary

ولنثبت ان $\sqrt{Q} = \sqrt{Q:a}$

من الواضح ان $\sqrt{Q} \subseteq \sqrt{Q:a}$

$\forall x \in \sqrt{Q:a} \Rightarrow \exists n \in N \quad x^n \in Q:a$

$\Rightarrow a x^n \in Q$

$a \notin Q \Rightarrow x^n \in Q \Rightarrow x \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{Q:a} \subseteq \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{Q} = \sqrt{Q:a}$

$x, y \in R \quad x.y \in (Q:a)$

$(ax)y \in Q \Rightarrow ax \in Q \vee y \in \sqrt{Q}$

/ /

$a \notin Q \Rightarrow x \in Q : a \quad y \in \sqrt{a} = \sqrt{Q : a}$

$\sqrt{Q : a}$ _primary هو $(Q : a)$ ومنه

$\equiv \sqrt{Q}$ _primary

$\equiv p$ _primary $\quad ; p = \sqrt{Q} = \sqrt{Q : a}$

$\boxed{\Sigma}$ * باستخدام الخاصة $\quad S^{-1}I = S^{-1}R \quad I \cap S \neq \phi$

ومنه نثبت

$Q \cap S \neq \phi \quad \sqrt{Q} \cap S \neq \phi \Leftrightarrow Q \wedge S \neq \phi$

$S \cap P \neq \phi \quad \exists x \in P = \sqrt{Q} \quad x \in S \quad x \in P \cap S$

$\exists n \in N \quad x^n \in Q \quad x^n \in S$ مغلقة ضربياً s

$\Rightarrow x^n \in Q \cap S \Rightarrow Q \cap S \neq \phi$

$\Rightarrow S^{-1}Q = S^{-1}R$

** نثبت أن $\quad S^{-1}Q \cap R = Q$

شكل عناصر $S^{-1}Q$

$(q, s) = \frac{q}{s}$

شكل عناصر R

$(r, 1) = \frac{r}{1}$

وضوحاً. $\left.\begin{array}{l} Q \subseteq S^{-1}Q \\ Q \subseteq R \end{array}\right\} Q \subseteq S^{-1}Q \cap R$

$\forall \frac{x}{s} \in S^{-1}Q \cap R \Rightarrow x/s \in S^{-1}Q$

$x/s \in R$

$\begin{cases} \exists\ q/t \in S^{-1}Q & ; q/t = x/s \\ \exists\ r \in R & r/1 = x/s \end{cases}$

$\exists u_1, u_2 \in S \Rightarrow \begin{cases} u_1 t x = u_1 q s \\ \underbrace{u_2 x}_{\in Q} = \underbrace{u_2 s}_{\in S} r \in Q \end{cases} \quad u_2 \cancel{s} \notin Q \ ; \sqrt{Q} \cap S = \phi$

Galaxy

٥٨

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow r \in Q \quad \Rightarrow \frac{x}{s} = \frac{r}{1} \in Q$

$\Rightarrow S^{-1}Q \cap R \subseteq Q$

$\Rightarrow S^{-1}Q \cap R = Q.$

والآن نثبت ان $S^{-1}Q$ Primary. $\sqrt{S^{-1}Q}$

لكن اولاً علينا اثبات $\sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q}$

$Q \subseteq \sqrt{Q} \Rightarrow S^{-1}Q \subseteq S^{-1}\sqrt{Q}$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{S^{-1}Q} \subseteq \sqrt{S^{-1}\sqrt{Q}} = S^{-1}\sqrt{Q}}$

وذلك لان $\sqrt{Q}$ مثالي اولي. فيصبح $\sqrt{S^{-1}\sqrt{Q}}$ مثالي اولي

وذلك حسب الملاحظة التالية

$$\left\{ P : \begin{array}{l} P \in spec(R) \\ P \cap S = \phi \end{array} \right\} \overset{\text{تقابل}}{\Longleftrightarrow} \left\{ S^{-1}P : S^{-1}P \in spec(S^{-1}R) \right\}$$

او بطريقة أخرى

$\forall\, a/s \in \sqrt{S^{-1}Q} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad (a/s)^n \in S^{-1}Q$

$\frac{a^n}{1} = \frac{s^n}{1}\left(\frac{a}{s}\right)^n \in S^{-1}Q \quad ; a^n \in R$

$\Rightarrow a^n = \frac{a^n}{1} \in S^{-1}Q \cap R = Q$

$\Rightarrow a \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow a/s \in S^{-1}\sqrt{Q}$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{S^{-1}Q} \subseteq S^{-1}\sqrt{Q}}$

لنثبت الاحتواء الآخر

$a_1/s_1,\ a_2/s_2 \in S^{-1}R \Rightarrow \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}Q$

$\frac{a_1 a_2}{1} = s_1 s_2 \left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{a_2}{s_2}\right) \in S^{-1}Q$

$a_1 . a_2 \in S^{-1}Q \cap R = Q$

$\Rightarrow a_1 \in Q \vee a_2 \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{s} \in S^{-1}Q \vee \frac{a_2}{S_2} \in S^{-1}\sqrt{Q} = \sqrt{S^{-1}Q}$

ومنه $S^{-1}Q$ هو $\sqrt{S^{-1}Q}$-Primary

نتيجة (٣٤) لتكن R حلقة واحدية تبديلية نوثرية

ولتكن $Q \trianglelefteq R$ ، $\mathcal{Y} \trianglelefteq R$

١- اذا كان Q هو P-primary فإن $\exists n \in N \quad P^n \subseteq Q \subset P$

٢- القضايا التالية متكافئة : # Q هو $\mathcal{Y}$-primary

$ \sqrt{Q} = \mathcal{Y}$ \$

$\triangle \quad \mathcal{Y}^n \subseteq Q \subseteq \mathcal{Y} \quad \exists n \in N$

$\boxed{1}$ R نوثرية $\Leftarrow$ R/Q نوثري

اذا كانت R نوثرية فإن $N(R)$ قابل للعدم $\quad \exists n \in N \quad (N(R/Q))^n = \{0\}$

$N(R/Q) = \frac{\sqrt{Q}}{Q} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{Q}}{Q}\right)^n = \bar{0}$

$\Rightarrow \left(\frac{P}{Q}\right)^n = 0$

$\exists n \in N \quad P^n = Q^n \subseteq Q$

$\Rightarrow \exists n \in N \quad P^n \subseteq Q \subseteq P$

$\boxed{2}$ $\$ \Leftarrow \#$ حسب تعريف P-Primary

لنفرض ان $\mathcal{Y} = P$

Galaxy

٦٠

/ /

$\gamma = P = \sqrt{Q} \Leftarrow \begin{cases} P = \sqrt{Q} \text{ و } P\text{-primary هو } Q \text{ حيث} \\ \Leftarrow Q \text{ هو } \gamma\text{-primary حسب الفرض} \end{cases}$

$\Delta \Leftarrow \$$: $\sqrt{Q} = \gamma \triangleleft R$ بفرض Q هو P-primary
لدينا حسب III $\quad P^n \subseteq Q \subseteq P \quad \exists n \in N$
فإن $\quad \gamma^n \subseteq Q \subseteq \gamma \quad \exists n \in N$

$\Delta \Leftarrow \#$ علينا اثبات ان Q هو P-primary

$\exists n \in N \qquad \gamma^n \subseteq Q \subseteq \gamma$

$\sqrt{\gamma^n} \subseteq \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{\gamma}$

وبما ان $\gamma \triangleleft R$ فإن $\quad \gamma = \sqrt{\gamma^n} = \sqrt{\gamma}$

$\Rightarrow \sqrt{Q} = \gamma \triangleleft R \Rightarrow$ تم المطلوب

و Q هو γ-primary

تمرين (٢٠) اذا كان $I \trianglelefteq R$ ، $a \in R$ ولدينا $I : a = I : a^2$
فإن $I = (I : a) \cap (I + \langle a \rangle)$

$\left. \begin{array}{l} I \subseteq I : a \\ I \subseteq I + \langle a \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow I \subseteq (I : a) \cap (I + \langle a \rangle)$

لنثبت الاحتواء الآخر

$\forall x \in (I : a) \cap (I + \langle a \rangle)$

$\Rightarrow x \in I : a \Rightarrow ax \in I$

$x \in I + \langle a \rangle \Rightarrow \exists y \in I \;\; r \in R \qquad x = y + ar$

$ax + ay + a^2 r \in I$

Galaxy

71

$$a^2 r \in I \Rightarrow r \in (I : a^2)$$
$$\Rightarrow r \in I : a$$
$$x = y + ar \in I$$
$$\Rightarrow (I:a) \cap (I + \langle a \rangle) \subseteq I$$

وهو المطلوب.

ليس بالضرورة ان يكون كل مثالي له تحليل ابتدائي الا في حال كانت R نوثرية.

ملاحظة:

- اذا كان $\gamma \triangleleft R$ فإن γ^n هو γ-primary
- اذا كان $P \in spec(R)$ فإن P^n هو P-primary

مثال معاكس

$$R = \frac{\mathbb{R}[x, y, z]}{\langle x \cdot y - z^2 \rangle}$$

$$P = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in Spec(R)$$

لكن P^2 ليس اولي لكن $P^2 = \langle \bar{x}^2, \overline{x \cdot y}, \bar{y}^2 \rangle$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{z}^2 = \bar{z} \cdot \bar{z}$$
$$\Rightarrow \bar{z} \notin P^2 \wedge \bar{z} \notin \sqrt{P^2} = P$$

فإن P^2 ليس ابتدائي و P ليس اولي

تعريف: ليكن $R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ، $I \trianglelefteq \mathbb{R}$

نعرف المجموعة الجبرية
- algebraie set
- Affine algebraie Varietys

$$S = \{\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \; ; f(\underline{a}) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

/ /

$S = \{ a=(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a)=0 \quad \forall f \in I \}$

$R = \mathbb{R}[x,y]$

$I = \langle f_1 = x-y \, , \, f_2 = x^2 \rangle$

مبرهنة لوسكر (٣٦) لتكن R حلقة واحدية تبديلية اذا كانت R نوثرية
فان اي مثالي في R يملك تحليل ابتدائي

• ان اي مثالي في حلقة نوثرية هو قابل للتحليل
• المثالي الابتدائي لا يملك تحليل ابتدائي سوى نفسه

ح/ نفرض جدلاً ان اي مثالي I في R لا يملك تحليل ابتدائي

ولتكن $\phi \neq X = \{ I \subsetneq R$ لا يملك تحليل ابتدائي $I \}$

$\exists\, I_0 \in X$ عنصر اعظمي I_0

بما ان X لا تملك تحليل ابتدائي فان I_0 ليس مثالي ابتدائي

$\exists\, a,b \in R \qquad a.b \in I_0$

$a \notin I_0 \ \wedge \ \forall n \in N \quad b^n \notin I_0$

لناخذ السلسلة المتزايدة من المثاليات R $\quad (I_0:b) \subseteq (I_0:b^2) \subseteq \ldots$

بما ان R نوثرية فان $\quad \exists\, k \in N \qquad (I_0:b^k) = (I_0:b^i)$

$2k \geq k \qquad (I_0:b^k) = ((I_0:b^k)^2)$

$\Rightarrow I_0 = (I_0:b^k) \cap (I_0 + \langle b^k \rangle)$

$* \ a.b \in I_0 \Rightarrow a \in (I_0:b) \subseteq (I_0:b^k)$

حسب الفرض ان $a \notin I_0$ عندئذ $I_0 \subsetneq (I_0:b^k)$

$** \ b^k \in I_0 + \langle b^k \rangle \qquad b^k \notin I_0 \Rightarrow I_0 \subsetneq (I_0 + \langle b^k \rangle)$

لكن I_0 اعظمي في X $\Leftarrow \quad (I_0:b^k) \notin X$

$I_0 + \langle b^k \rangle \notin X$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists \{Q_1, Q_2 \text{ ---- } Q_r\} & \text{تحليل ابتدائي لـ } I_0 : b^k \\ \exists \{Q_{r+1}, \text{ ---- } Q_s\} & \text{تحليل ابتدائي لـ } I_0 + \langle b^k \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (I_0 : b^k) = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i \\ I_0 + \langle b^k \rangle = \bigcap_{i=r+1}^{s} Q_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (I_0 : b^k) \cap (I_0 + \langle b^k \rangle) = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$$

وهذا يناقض الفرض. ومنه $X = \phi$

انتهت المحاضرة الثانية عشرة .

الحياة ليست تعيسة لكن قلوبنا بالبعد عن الله كئيبة

المحاضرة الثالثة عشرة.

الاربعاء ٢٦ صفر ١٤٣٩هـ
١٥ تشرين٢ ٢٠١٧م

تعاريف: ○ R حلقة واحدية تبديلية و $I \triangleleft R$ نعرف مجموعة المثاليات الاولية المرافقة للمثالي associated primary

$$Ass(I) = \{P \in spec(R) \quad \exists a \in R \;;\; P = \sqrt{I:a}\}$$

مجموعة المثاليات الاصغرية.

$$Min(I) = \{P \in Ass(I) \quad \nexists Q \in Ass(I) \;;\; I \subseteq Q \subsetneqq P\}$$

المثاليات المغمورة في $Ass(I)$

$$Emb(I) = Ass(I) \setminus Min(I)$$

مبرهنة (٣٧) لتكن R حلقة واحدية تبديلية وليكن $I_1, I_2 \ldots I_n \trianglelefteq R$
وليكن $P \in spec(R)$

اذا كان $\bigcap I_i \subseteq P$ فإنه $\exists i \in \{1,2 \ldots n\} \quad I_i \subseteq P$

نفرض جدلاً ان $I_i \not\subseteq P \quad \forall i \in \{1,2 \ldots n\}$

$$\exists x_i \in I_i \qquad x_i \notin P$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \in \prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \bigcap_{i=1} I_i \subseteq P$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1,2 \ldots n\} \quad , x_i \in P$$

وهذا تناقض عندئذ الفرض الجدلي خاطئ عندئذ

$$\forall i \in \{1,2 \ldots n\} \qquad \bigcap I_i \subseteq P.$$

مبرهنة مهمة (٣٨) لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $I \trianglelefteq R$

اذا كان $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ تحليل ابتدائي مختزل

لـ I فان $Ass(I) = \{\sqrt{Q_1}, \sqrt{Q_2}, \ldots, \sqrt{Q_n}\}$

$\forall p \in Ass(I) \quad ; \; P \in Spec(R)$

$\exists a \in R \quad P = \sqrt{I : a}$ حسب التعريف

خاصية $= \sqrt{\cap Q_i : a} \quad = \cap \sqrt{Q_i : a}$

$\sqrt{\cap P_i : a} = \cap \sqrt{P_i : a} \quad P = \bigcap\limits_{a \notin Q_i} \sqrt{Q_i : a}$

ملاحظة:

$a \notin Q_2 \quad a \in Q_1, Q_3$

$Q_i = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$

$(Q_i : a) = (Q_1 : a) \cap (Q_2 : a) \cap (Q_3 : a)$

$= R \cap (Q_2 : a) \cap R$

$= (Q_2 : a)$

$\Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots n\} \quad P = \sqrt{Q_i}$

$Ass(I) \subseteq \{\sqrt{Q_1}, \ldots, \sqrt{Q_n}\}$

الاحتواء الثاني:

$\exists a \notin Q_k \quad k \in \{1, \ldots r\}$

$a \in \bigcap\limits_{i \neq k} Q_i$

$I : a = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{r} Q_i : a\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (Q_i : a)$

$= \bigcap\limits_{a \notin Q_i} (Q_i : a) = (Q_k : a)$

$a \notin Q_k \quad \sqrt{I : a} = \sqrt{Q_k : a} = \sqrt{Q_k} =: P \in Spec(R)$

$\Rightarrow \sqrt{Q_k} \in Ass(I)$

$\Rightarrow \{\sqrt{Q_1}, \sqrt{Q_2}, \ldots, \sqrt{Q_k}\} \subseteq Ass(I)$

$\Rightarrow \{\sqrt{Q_1}, \sqrt{Q_2}, \ldots, \sqrt{Q_k}\} = Ass(I)$

/ /

دورة تمرين: اوجد التحليل الابتدائي للمثالي I ثم مجموعة المثاليات الاولية المرافقة لـ I والمنعزلة الاصغرية والـ
ثم عين المجموعات الجبرية المقابلة لها وعبر عنها بالرسم

$I = \langle x^2, xy \rangle \qquad R = \mathbb{R}[x,y]$

$I = \langle x^2 \rangle \cap \langle x, y \rangle$

$= \langle y, x^2 \rangle \cap \langle x \rangle$

$Ass(I) = \{\langle x \rangle, \langle x, y \rangle\}$ مجموعة المثاليات الاولية المرافق لـ I

$Min(I) = \{\langle x \rangle\}$ مجموعة المثاليات الاصغرية

$Emb(I) = \{\langle x, y \rangle\}$ مجموعة المثاليات المطمورة

المجموعات الجبرية

$S_1 = V(\langle x \rangle)$

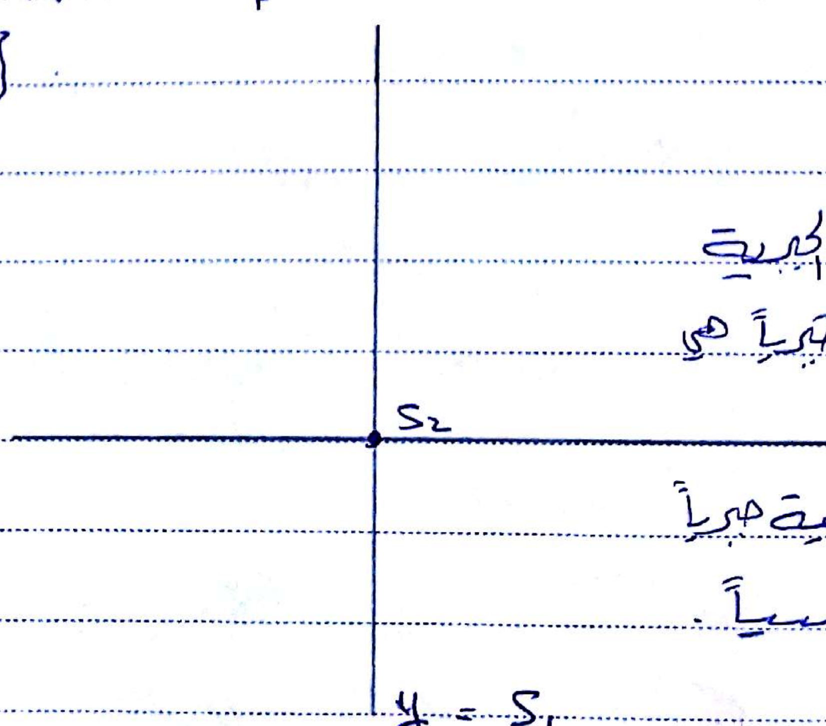
$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a,b) = 0 \quad \forall f \in \langle x \rangle\}$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall b \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = V(\langle x, y \rangle)$

$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad f(a,b) = 0 \quad \forall f \in \langle x, y \rangle\}$

$= \{(0,0)\}$



في الهندسة الجبرية
المجموعة الاصغرية جبرياً هي
عظمى هندسياً
اما المجموعة العظمى جبرياً
هي صغرى هندسياً.

Galaxy

نتائج وجود تحليل ابتدائي

نتيجة (٣٩) R حلقة واحدية تبديلية و $I \trianglelefteq R$

$\{Q_1, Q_2 ——— Q_n\}$ تحليل ابتدائي min. P.D

عندئذ: $\underbrace{\bigcup_{i=1}^{r} \sqrt{Q_i}}_{l.h.s} = \underbrace{\{a \in R \quad \bar{a} \in R/I \text{ zerodivisor}\}}_{r.h.s}$

$b \in r.h.s \qquad b \in R \Rightarrow \bar{b} \in R/I$ zerodivisor

$\exists a \in I \qquad ; ab \in I$

$b \in I \qquad a \subseteq \bigcup_{a \notin I} \sqrt{I:a}$

$\Rightarrow \underline{r.h.s \subseteq \bigcup_{a \notin I} \sqrt{I:a}} \qquad \vee \; b \in \bigcup_{a \in I} \sqrt{I:a}$

عنصر صفري

$\exists m \in N \qquad b^m \in (I:a) \qquad a \notin I$

$\Rightarrow ab^m \in I$

$(ab^{m-1}) b \in I$

$\Rightarrow 0 \neq ab^{m-1} \notin I$

$\bar{b} \in R/I$ zero divisor

$\Rightarrow b \in r.h.s \Rightarrow \underline{\bigcup_{a \notin I} \sqrt{I:a} \subset r.h.s}$

$r.h.s = \bigcup_{a \notin I} \sqrt{I:a}$

$\underline{l.h.s \subset \bigcup_{a \notin I} \sqrt{(I:a)}}$

$Ass(I) \ni \sqrt{Q_i} = \sqrt{I:a}$

$\forall a \notin I = Q_1 \cap Q_2 ---- \cap Q_r$

$\exists k \in \{1, 2 --- k\} \qquad a \notin Q_k$

Galaxy

٦٨

$$\Rightarrow \bigcup_{a\notin I}\sqrt{I:a} = \bigcap_{i=1} \sqrt{Q_i : a} \subseteq \sqrt{Q_k : a}_{\bar{a}\notin Q_k} = \sqrt{Q_k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{a\notin I}\sqrt{I:a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r}\sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{a\notin I}\sqrt{I:a} = \text{L.h.s.}$$

نتيجة (٤)

R حلقة واحدية تبديلية ، $I \trianglelefteq R$

عندئذ $\text{Min. p. D} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$

$$\text{Min}(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \quad \nexists Q \in \text{spec}(R) \quad I \subseteq Q \subsetneq P\}$$

مجموعة المثاليات الأولية الأصغرية بالنسبة لاحتواء المثالي I

من الواضح ان $\text{Min}(I) \subseteq \{P \in \text{spec}(R) \ \nexists Q \in \text{spec}(R) \ I \subseteq Q \subsetneq P\}$

وذلك حسب التعريف

لنثبت الاحتواء الثاني

ليكن $P \in \text{spec}(R)$ $\quad I \subseteq P$

$$\prod_{i=1}^{r} Q_i \subseteq I \subseteq P$$

اذن $\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ $\quad Q_i \subseteq P$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_i} \subseteq \sqrt{P} = P$$

$$\sqrt{Q_i : a} = \sqrt{Q_i} \qquad a \notin Q_i$$

لايوجد اصغر منه $\Rightarrow P = \sqrt{Q_i} \qquad Q \subsetneq P$

$$\Rightarrow P \in \text{Ass}(I) \Rightarrow P \in \text{Min}(I)$$

حسب شكل عناصر Ass

لايوجد اصغر منه

$\Rightarrow \{P \in spec(R) \quad \nexists Q \in spec(R) \quad I \subseteq Q \subsetneqq P\} \subseteq Min(I)$

تمرين دورة: بين أن عدد المثاليات الأولية الأصغرية منتهي بحيث $\dim(R)=0$

(ا) ص٤٩ الاتجاه الثاني في تمهيدية Hopkins.

$\dim(R) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}\text{-}spec(R) = spec(R)$

$\mathcal{M}\text{-}spec(R) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \,\_\_\_\, \mathcal{M}_r\}.$

$\exists n \in \mathbb{N} \quad \{0\} = (N(R))^n = (\bigcap_{i=1} \mathcal{M}_i)^n \supseteq \mathcal{M}_1^n \cdot \mathcal{M}_2^n \cdots \mathcal{M}_r^n$

$\Rightarrow \mathcal{M}_1^n \cdot \mathcal{M}_2^n \,\_\_\_\, \mathcal{M}_r^n = \{0\} \Rightarrow$ ارتينية R.

تعريف: R حلقة واحدية تبديلية في R و $I \trianglelefteq R$

$P \in spec(R) \qquad a_1, a_2 \,\_\_\_\, a_r \in R$

$QP^{(n)} = P^n R_P \cap R = \{r \in R \quad \exists b \in R/P \quad r.b \in P^n\}$

القوة الرمزية النونية n th Symbolic Power

$P = \sqrt{P^n} \subseteq \sqrt{P^{(n)}} \subseteq \sqrt{P'} = \sqrt{P} = P$ *

$\Rightarrow P = \sqrt{P^{(n)}}$

يسمى P اصغري بالنسبة للعناصر $a_1, a_2 \,\_\_\_\, a_r$

اذا كان لا يوجد $Q \in spec(R)$ يحقق

$a_1, a_2, \,\_\_\_\, a_r \in Q$

$ht(P) = Sup\{m, \exists P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subseteq P_m\} = P$ *

Galaxy

V.

$\operatorname{Codim}(P)$ ارتفاع المثالي $ht(P)$ $P \in \operatorname{Spec}(R)\}$ حيث

$ht(P) = \operatorname{Inf}\{ht(P) \quad I \subseteq P \in \operatorname{spec}(R)\}$ *

ارتفاع المثالي I

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة

المستقبل...

هو ما لم يكتبه الله لك

وليس ما عجزت عنه انت

Galaxy

VI

المحاضرة الرابعة عشرة.

الاثنين ٢ ربيع أول ١٤٣٩هـ
٢٠ نوفمبر ٢٠١٧م

مثال. لتكن $R = R[x,y]$ ، $I = \langle x,y \rangle$
ولتكن $P_1 = \langle x \rangle$ ، $P_2 = \langle y \rangle$ ، $P_3 = \langle x,y \rangle$ مثاليات أولية في R
أوجد ارتفاع المثاليات السابقة:

$ht(P_1) = 1$ $\qquad \langle 0 \rangle \subsetneq P_1$

$ht(P_2) = 1$ $\qquad \langle 0 \rangle \subsetneq P_2$

$ht(P_3) = 2$ $\qquad \langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq P_3$

$ht(I) = 1$ $\qquad \langle 0 \rangle \subsetneq P_2 \subsetneq P_3$

(K.P.I.T) Krull's Principle ideal Theorem

R حلقة نوثرية ، $a \in R/U(R)$
اذا كان $P \in spec(R)$ اصغري بالنسبة لـ a فإن $ht(P) \leq 1$

نفرض جدلاً أن $ht(P) > 1$
$\exists Q, Q' \in spec(R) \; ; \; Q' \subsetneq Q \subsetneq P$

ولنفرض أن $Q' = \langle 0 \rangle$ ، R هي ID كحالة خاصة
بما أن P مثالي اصغري وأولي فإنه أعظمي $P \triangleleft R$
حسب كل مثالي أعظمي أولي
$R/\langle a \rangle \triangleleft P/\langle a \rangle \Leftarrow dim(R/\langle a \rangle) = 0$

بما أن R نوثرية فإن $R/\langle a \rangle$ نوثرية

باستخدام Hopkins فإن $R/\langle a\rangle$ أرتينية

لنأخذ السلسلة المتناقصة من المثاليات في $R/\langle a\rangle$ ولتكن

$$\frac{Q^{(1)}+\langle a\rangle}{\langle a\rangle} \supseteq \frac{Q^{(2)}+\langle a\rangle}{\langle a\rangle} \supseteq \dots$$

$$\exists n\in\mathbb{N} \quad Q^{(n)}+\langle a\rangle = Q^{(n+1)}+\langle a\rangle$$

$$\forall y\in Q^{(n)} \subseteq Q^{(n)}+\langle a\rangle = Q^{(n+1)}+\langle a\rangle$$

$$\exists q\in Q^{(n+1)} \quad r\in R \quad y=q+ar$$

$$\Rightarrow ar = \underset{Q^{(n)}}{y} - q_{\in Q^{(n)}} \in Q^{(n)}$$

$$Q^{(n+1)}\subseteq Q^{(n)}$$

$$\Rightarrow Q^{(n)} \subseteq Q^{(n+1)} + \langle a\rangle Q^{(n)} \subseteq Q^{(n+1)} + \underbrace{J(R)}_{P} Q^{(n)}$$

$$\Rightarrow Q^{(n)} = Q^{(n+1)} + J(R) Q^{(n)} \subseteq Q^{(n)}$$

ومنه حسب Nak(2) فإن $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$

$$\Rightarrow (QR_Q)^n = (QR_Q)^{n+1} = (QR_Q)^n(QR_Q) \subseteq PR_P$$

وحسب Nak المناسبة $(QR_Q)^n = \{0\}$

وبما أن R_Q هي ID $\Rightarrow QR_Q = \{0\} \Rightarrow Q = \{0\}$

وهذا يناقض $Q' \subsetneq Q$ عند فرض البرهان الأولي فاصل.

$ht(P)\le 1$.

نتيجة (٢): اذا كانت R نوثرية و $P_1, P_2, P_3 \in Spec(R)$
تحقق $P_1 \subsetneqq P_2 \subsetneqq P_3$ و $a \in P_3 / P_2$

فإنه $P_1 \subsetneqq P \subsetneqq P_3$ $a \in P$ $\exists P \in spec(R)$

لنفرض ان R/P_1 نوثريه
ولتكن $\bar{a} \in P_3 / P_1$

$$P_1/P_1 \subsetneqq P_2/P_1 \subsetneqq P_3/P_1$$
$0 \qquad 1 \qquad 2$

عندئذ $ht(P_3/P_1) \geq 2$

تنويه
في الحلقة النوثرية بين كل مثاليين
أوليين نوجد مثالي أولي
بشرط الاحتواء بينهما غير
قابل للقلب بحيث ينتمي لأحدهما

وبالتالي حسب (K.P.I.T) فإن
$\bar{a} \in P_3/P_1$ ليس اصغري بالنسبة لـ $\bar{a}$ عندئذ
$\exists P/P_1 \in spec(R/P_1)$ $\bar{a} \in P/P_1$
حيث $P/P_1 \subsetneqq P_3/P_1$

$\exists P \in Spec(R)$ $a \in P$ $P_1 \subsetneqq P \subsetneqq P_3$

انتهت المحاضرة الرابعة عشرة

لن يمكنك تحقيق النجاح إلا إذا أحببت ما تقوم به