◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة : السابعة عشر عنوان المحاضرة : التكاملات المعتلة

تعرفنا في المحاضرة السابقة على خواص التكامل البتاوي و الغماوي وسنتعرف في هذه المحاضرة على العلاقة بينهما كما سنثبت قاعدة ليجاندر وسنقوم بحل بعض التمرين .

بعض خواص التكامل البتاوي:

١) خاصة التناظر:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

متقاربة من أجل : $0 < q \;,\; 0 < p$

٢) خاصية تغيير الوسيط:

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

٣) خاصية تغيير المتحول:

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$

و هو تكامل معتل من النوع الأول وللتكامل قيمة فقط عندما $q = 1 - p$ أي $p + q = 1$

وقيمته هي:

$$B(p,q) = (p\,,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

٤) الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-1}\varphi\ d\varphi$$

خواص التكامل الغماوي:

١) تكامل بالتجزئة:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{p-1}\,dt$$

٢) $n,p \in z^*$ $\quad \Gamma(p+1) = p! \quad \Gamma(n+1) = n!$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

لنفرض $t = x^2$ ومنه $dt = 2xdx$

والآن نعوض في $\Gamma(p)$

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^{2p-2}.x\,dx$$

العلاقة بين التكامل الغماوي و البتاوي:

مبرهنة:

إذا كان p , q عددين موجبين فإن التكامل البتاوي :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

الإثبات:

نأخذ

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^{2p-1}\,dx$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}.y^{2q-1}\,dx$$

بضرب التكاملين طرفاً لطرف

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}.x^{2p-1}.y^{2q-1}\,dxdy$$

ولحساب هذا التكامل المضاعف (الثنائي) ننتقل إلى الإحداثيات القطبية:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

$$dx.dy = r\,dr\,d\theta$$

لأنه بحسب اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

والتكامل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint f(r\cos\theta\ , r\sin\theta)r\,.dr\,d\theta$$

بالعودة لإثبات المبرهنة:

حدود التكامل:

$$0 < r < \infty$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

وهي مساحة الربع الأول

بالتعويض تجميع المتحولات (كونها مستقلين عن بعضهما)

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^\infty (e^{-r^2}.r^{2p-1}.r^{2q-1}.r\,dr).2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta)$$

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}\,dr\,.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta$$

$$\Longrightarrow \Gamma(p).\Gamma(q) = \Gamma(p+q).B(p,q)$$

لأن $\Gamma(p)$ يحوي x^{2p-1} و هنا لدينا $r^{2(p+q)-1}$ وبالتالي هي $\Gamma(p+q)$

$$\boxed{\Rightarrow B(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

بوضع $p=\frac{1}{2}$ في الدستور التالي :

$$B(p\,,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

$$B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)=\pi=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

وبالتالي فإن:

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}.t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\sqrt{\pi}$$

حيث:

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-x^2}.x^{2p-1}\,dx$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

مثال: أحسب التكامل $\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\frac{\pi}{2}}\theta\;d\theta \qquad ; \quad 0<m,n\in\mathbb{Z}$

باستخدام تغيير المتحول:

$$\sin^2\theta=t \Leftarrow \sin\theta=t^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$cos\theta = \sqrt{1-t} = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

بتغيير حدود التكامل

$$\theta = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n.t^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$
$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

و لكن كيف عرفنا أن المساقط هي $1/2$, $n+1/2$ في

$$B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

لدينا من القوى :

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad t^{n-\frac{1}{2}}$$

و بالمقارنة مع الشكل العام للتكامل البتاوي:

$$p-1 = n-\frac{1}{2} \Rightarrow p = n-\frac{1}{2}+1 = n+\frac{1}{2}$$
$$q-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

لذلك:

$$J = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!}$$

حيث:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

و ذلك بالاستفادة من العلاقة:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

أي طرحنا واحد من الـ $(p+1)$

بالعودة للمثال: نوحد المقامات مع ملاحظة أن $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$

$$J = \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1.\pi}{2^n.n!}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2^n.n!}$$

لحساب $2^n.n!$:

$$2^n = \underbrace{2.2.2.2\dots 2}_{\text{مرة}}$$

$$n! = 1.2.3\dots(n-1).n$$

$$\Rightarrow 2^n.n! = (2.2.2.2\dots 2)(1.2.3\dots.n) = (2.1)(2.2)(2.3)\dots(2n) = 2.4.6\dots(2n-2)(2n) = (2n)!!$$

و لدينا :

$$(2n-1)(2n-3)\dots 3.1 = (2n-1)!!$$

ومنه:

$$J = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}$$

قاعدة ليجاندر

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$$

الإثبات

لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

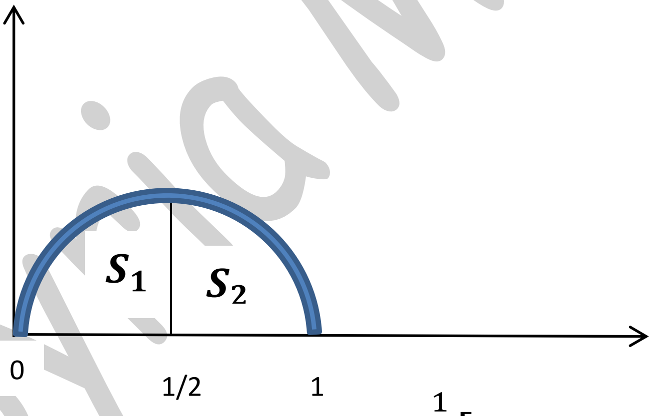
نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$



$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p)=-2\int_{1}^{0}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1}.\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=-2\int_{1}^{0}\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t\right]^{p-1}dt$$

$$=-2\int_{1}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-\mathrm{t})\right]^{\mathrm{p}-1}\mathrm{dt}$$

$$=-\frac{2.1}{4}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{p-1}}\int_{1}^{0}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2p-2}}\int_{0}^{1}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_{0}^{1}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_{0}^{1}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$=\frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

لقد حصلنا على $B\left(\frac{1}{2},p\right)$ من الأسس حيث $t^{-\frac{1}{2}}$ أسه $-\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وحصلنا على الـp من أس $(1-t)^{p-1}$ نضيف للأس واحد فيصبح $p-1+1=p$ ولذلك $B\left(\frac{1}{2},p\right)$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ كما حسبناه بالمحاضرة السابقة.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad ; \qquad a>0$$

نستخدم طريقة تغيير المتحول:

نفرض: $x=at^{\frac{1}{2}}$

$$x^2 = a^2 t$$

$$dx = \frac{1}{2} a t^{-\frac{1}{2}} dt$$

نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x = 0 \Longrightarrow t = 0$$

$$x = a \Longrightarrow t = 1$$

والآن نعوض بالتكامل:

$$I = \int_0^1 a^2 t \sqrt{a^2 - a^2 t} . \frac{1}{2} a t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$I = a^3 \int_0^1 t \sqrt{a^2 (1 - t)} . \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= a^3 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} . a . \sqrt{1 - t} . \frac{1}{2} dt$$

$$\Longrightarrow I = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ تم الحصول عليها من الأسس

حيث $t^{\frac{1}{2}}$ أسه $\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $\frac{3}{2}$ و $(1 - t)^{\frac{1}{2}}$ أسه $\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $\frac{3}{2}$

$$\Longrightarrow I = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^4}{2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2} . \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{a^4 \pi}{2^4}$$

لأن:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

من القانون:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

أي:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}$$

ونحن نعلم أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

ومنه:

$$\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2=\frac{\pi}{4}$$

و

$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2.\Gamma(2)=2.\Gamma(1+1)$$
$$=2.1\Gamma(1)=2.1.1=2$$

ومنه:

$$\Gamma(3)=2!=2$$

وبالتالي:

$$\boxed{I=\frac{a^4.\pi}{2^4}}$$

مثال: أوجد التكامل:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

$$=\int_0^1(1-x^n)^{-\frac{1}{n}}\,dx$$

بتغيير المتحول:

نفرض: $x^n=t$

$$\Longrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\, dt$$

نغير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x = 0 \Longrightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Longrightarrow t = 1$$

ومنه:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

تم حساب $B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ من أسس الـ t, $(1-t)$

حيث أس t هو $\left(\frac{1}{n} - 1\right)$ نضيف واحد فيصبح $\frac{1}{n}$ كما أن أس $(1-t)$ هو $\left(-\frac{1}{n}\right)$ نضيف واحد فيصبح $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ومنه $B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

ومنه:

$$I = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

وَ $B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ من الشكل $B(p, 1-p)$

ونحن نعلم من محاضرات سابقة أن:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

ومنه:

$$I = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

مثال: أوجد التكامل

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\ dx \qquad : n=2k : k\in Z$$

بتغيير المتحول: نفرض :

$$x=\arctan t^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \tan x=t^{\frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$dx=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}dt$$

نغير حدود التكامل:

$$x=0\Rightarrow t=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\infty$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}}.t^{-\frac{1}{2}}}{1+t}\ dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}\ dt$$

$$I=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)$$

تم الحصول على $B\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الأسس

حيث:

$$\frac{n-1}{2}=p-1\Rightarrow p=\frac{n+1}{2}$$

و $p+q=1\Rightarrow q-1=-p\Rightarrow q=1-p$

$$q=1-\frac{n+1}{2}=\frac{2-n+1}{2}=1-\frac{n+1}{2}$$

ومنه:

$$I=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)$$

نلاحظ أن $B\left(\frac{n+1}{2},1-\frac{n+1}{2}\right)$ من الشكل $B(p,1-p)$ ونحن نعلم واستنتجنا سابقاً أن:

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{sin\,p\pi}$$

ومنه:

$$I=\frac{1}{2}\frac{\pi}{sin\frac{n+1}{2}.\pi}$$

إذا كان $n=2$:

$$I=\frac{1}{2}\frac{\pi}{sin\frac{3}{2}.\pi}=\frac{-\pi}{2}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز – لانا شهاب