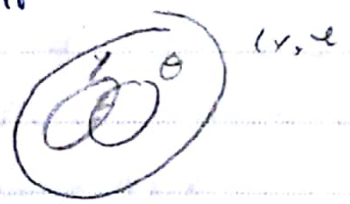
المحاضرة السابعة — أ ر 2017/10/25

- $X = \{a, b, c\}$

$\tau_a = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

- $X = \mathbb{R}$

$\tau_{10} = \{A \subseteq R, 10 \in R\}$



أثر تبولوجيا: $\tau_Y = \{Y \cap \theta : \theta \in \tau\}$

ويكون (Y, τ_Y) فضاء تبولوجي جزئي

$\theta_1 \in \tau_Y \Rightarrow$ مغلقة في X $\theta_1 = Y \cap \theta$

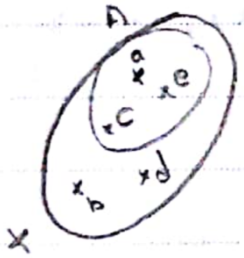
$F \subseteq Y,\ Y - F \in \tau_Y \Leftrightarrow \exists H\ F = Y \cap H$

- $X = \{a, b, c, d, e\}$ $\frac{43}{82}$

$\tau = \{X, \Phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$

$A = \{a, c, e\}$

أوجد τ_A؟



$\tau_A = \{A \cap \theta : \theta \in \tau\}$

$\tau_A = \{A, \Phi, \{a\}, \{a,c\}, \{a,e\}\}$

$\{e\}$ مغلقة في X لأن $X - \{e\} = \{a,b,c,d\}$ مفتوحة في X

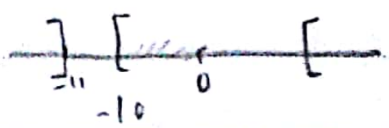
$\{a,c\}$ هل هي مفتوحة في X لا لأنها لا تنتمي لـ τ أما في A فهي مفتوحة لأنها تنتمي لـ τ_A

- $X = \mathbb{R}$ $A = [-10, 10]$ هل المجموعة $B = [-10, 10[\subseteq A \subseteq R$ مفتوحة؟

B غير مفتوحة وغير مغلقة في $\mathbb{R}$

$\theta =]-11, 0[$

$\theta \cap A = [-10, 0[$



Scanned by CamScanner

/ /

هل المجموعة $B_1 = [-10,5]$ مغلقة أم مفتوحة في A ؟

$A - B_1 =]5,10] \subseteq A$

علينا إيجاد مجال مفتوح $O_1 =]5,11[\subseteq \mathbb{R}$

$A - B_1 =]5,10] = A \cap]5,11[$

- B $\quad A = [-10,5[\quad Y = [-10,10[\quad X = \mathbb{R}$

ما هي لصاقة A في X وما هي لصاقة A في Y وعلّق على النتيجة

لصاقة A في X $\quad \bar{A} = [-10,5]$

" " Y $\quad Y \cap \bar{A} = [-10,10[\cap [-10,5] = [-10,5]$

حسب مبرهنة (3) ص 25

- $A =]-5,10[\quad Y = [-10,10[\quad X = \mathbb{R}$

لصاقة A في X $\quad \bar{A} = [\cancel{-10,5}\ -5,10]$

$cl_Y(A) = Y \cap [-5,10]$

$= [-10,10[\cap [-5,10] = [-5,10[$

تمرين :

ليكن (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاءان متريان $X = X_1 \times X_2$

$x = (x_1,x_2)$

$y = (y_1,y_2)$

$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$

$d'(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$

$d''(x,y) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2+y_2)}$

1- أثبت أن d_1 مسافة على X

2- " " d " "

3- " " d'' " "

4- " " $\tau_d = \tau_{d'} = \tau_{d''}$ (متكافئة تبولوجياً)

$(X, \mathscr{C})$

قاعدة $\mathcal{B} = \{\theta_1 \times \theta_2 : \theta_1 \in \mathscr{C}_1 , \theta_2 \in \mathscr{C}_2\}$

مستطيل مفتوح

$\theta \in \mathscr{C}$ ⟸ اتحاد المستطيلات مفتوحة θ

أسرة من الفضاءات التبولوجية $(X_1,\mathscr{C}_1), (X_2,\mathscr{C}_2)$ ----

زودت X بتبولوجيا قاعدة $\mathcal{B} = \{\theta_1 \times \theta_2 \times \dots \times \theta_n : \theta_i \in \mathscr{C}_i\}$

$\mathscr{C}$ تشكل التبولوجيا

عندئذ $X = \prod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{pr_1} X_1$

$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow pr_1(x) = x_1$

هي اصغر تبولوجيا تجعل توابع الإسقاط مستمرة.

P: 75

$\tau = \{\phi, N^*, E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}\} \; n \in N$ III

$A = \{4, 13, 28, 37\}$

$A^\circ, \bar{A}, A' = ?$

$X = N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$E_1 = \{1, 2, \dots\}$

$E_2 = \{2, \dots\}$

$E_3 = \{3, \dots\}$

$\cancel{A^\circ \; E_n = \{4, \dots\}}$ ϕ ~~[illegible]~~

المجموعات المغلقة في هذا الفضاء التبولوجي (X, τ) هي

$\mathcal{F} = \{N^*, \phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1, \dots, 37\}, \dots\}$

$\bar{A} = \{1, 2, \dots, 37\}$

$\{36, 37, 38, \dots\} \cap A \overset{?}{=} \phi = \{37\} \notin A'$

جوار 37

أي جوار لـ 36 يحوي جوار لـ 37

$\{36, 37, \dots\} \cap A = \{37\} \neq 36$

$\Rightarrow 36$ نقطة حدية

$A' = \{1, \dots, 36\}$

الأحد 2017/10/29 — المحاضرة الثامنة.

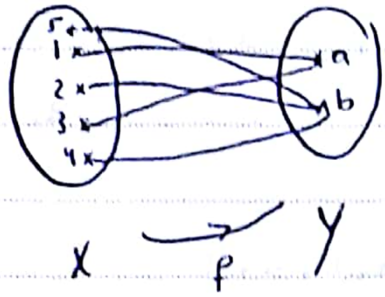
- تمرين: $X = \{1,2,3,4,5\}$ ، $Y = \{a,b\}$

$\tau = \{\phi, X, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\quad \tau' = \{\phi, Y, \{a\}\}$

وليكن f التطبيق المعرف كالتالي، هل f مستمر؟

$f(\phi) = \phi$ $\quad f^{-1}(Y) = X$ $\quad f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\} \notin \tau$

$\Leftarrow$ f غير مستمر



ليكن $A = \{1,2,3,4\} \subseteq X$ أوجد A° ، $\bar{A}$ ، τ_A ، F_A المغلقات في A

$F = \{X, \phi, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}\}$

$A^\circ = \{1,2\}$ $\quad \bar{A} = X$

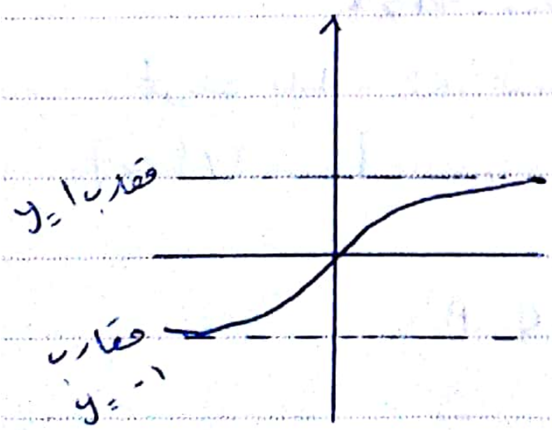
$\tau_A = \{\phi, A, \{1\}, \{1,2\}\}$

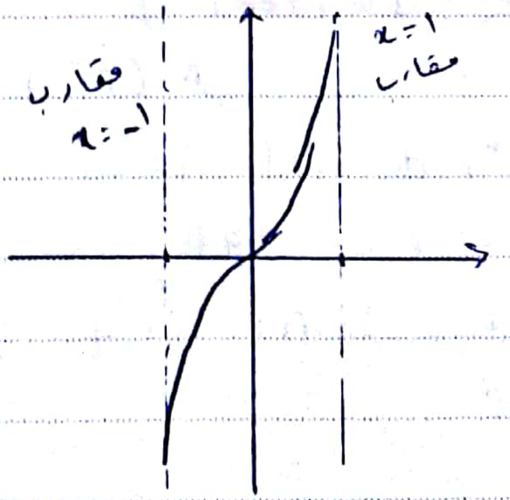
$F_A = \{A, \phi, \{2,3,4\}, \{3,4\}\}$

- تمرين: هل يوجد تطبيق مستمر وغامر من $]-1,1[$ ومستقره R؟

الحل: نعم مثلاً $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

f هو تقابل وخطه البياني كما في الشكل التالي:





- أثبت أن $\delta(x,y) = |g(x)-g(y)|$ مسافة على $\mathbb{R}$

1) $\delta(x,y) \geq 0$ واضح

2) $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow |g(x)-g(y)| = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(y)$

$\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ وتباين

3) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ وضوحا

4) $\delta(x,y) = |g(x)-g(y)| = |g(x) - g(z) + g(z) - g(y)|$

$\leq |g(x) - g(z)| + |g(z) - g(y)|$

$= \delta(x,z) + \delta(z,y)$

- عين الكرات التي مركزها الصفر ونصف قطرها $(3, 4, \frac{1}{3}, \_\_\_, \_\_\_)$

- ملاحظة: (تفيد في حل تمرين امتحان)

في الفضاءات المترية كل نقطتين مختلفتين تمتلكان حول كل منهما كرة مفتوحة وغير خالية

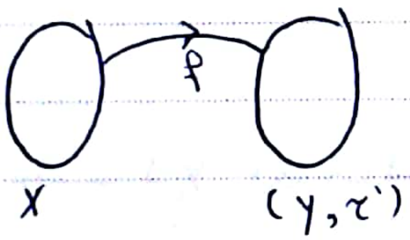
وهاتين الكرتين المفتوحتين غير متقاطعتين.

- توليد توبولوجيا على فضاء X بواسطة فضاء توبولوجي (Y, τ') وبوجود تطبيق X و Y

$\tau = \{A \subseteq X : A = f^{-1}(V) : V \in \tau'\}$

$\tau = f^{-1}(\tau')$

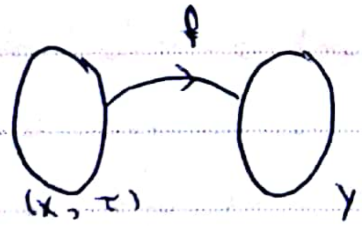
تشكل توبولوجيا على X



وبشكل مماثل

$\tau'' = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$

تشكل توبولوجيا على Y



* تمرين (حول الفضاءات الجزئية):

$X = \mathbb{R}$ $\quad Y_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ $\quad Y = [-1, 1]$

المطلوب: أي المجموعات التالية مفتوحة في Y وأيها مفتوحة في Y_1 وأيها مغلقة؟

وذلك في حالة:

أ) $\tau_{]a,b[}$ التبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$

ب) τ تبولوجيا زارسكي.

$A_1 = [-1, \frac{1}{2}[$, $A_2 = [-1, \frac{1}{2}]$ $\quad A_3 =]-1, \frac{1}{2}[$

$A_4 =]-10, 1]$ $\quad A_5 =]\frac{1}{2}, 1]$ $\quad A_6 =]1, 10]$

ثم تذكر أن $cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$ حيث $A \in \{A_1, A_2, \dots A_7\}$

① $\tau_Y = \{\theta \cap Y : \theta \in \tau_{]a,b[}\} = \{\phi, Y,]a,b[, [a,b[,]a,b]$
(تقاطع، انفتاح، انفتاح)

حيث $-1 \leq a < b \leq 1$.

$\tau_{Y_1} = \{\phi, Y_1, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \dots \{1,3\}, \{1,5\}, \dots$

$\{1,3,5,7\} \dots \{3,5\}, \{3,7\} \dots\} = P(Y_1)$.

مجموعة جميع المجموعات الجزئية من Y_1.

$f_Y = \{Y, \phi, [a,b]$ حيث $-1 \leq a \leq b \leq 1\}$ (انغلاق)

$f_{Y_1} = \tau_{Y_1} = P(Y_1)$

$A_1, A_5 \in \tau_Y$ $\quad A_2 \in f_Y$

بالنسبة لـ Y_1 المجموعات ليست مفتوحة ولا مغلقة.

2) $\tau_{\mathbb{R}} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A^c$ منتهية$\}$ تبولوجيا زارسكي: (تبولوجيا المتممات المنتهية)

$\tau_Y = \{\phi, Y,]-1, 1], [-1, 1[,]-1, 1[,$ وكل من الأشكال السابقة عدد منته من عناصر$\}$

$\tau_{Y_1} = \{\phi, Y_1, A \subseteq Y_1, A^c_{(Y_1)}$ منتهية$\}$

$f_Y = \{\phi, Y, B ; B \subseteq Y$ منتهية $B\}$

$f_{Y_1} = \{\phi, Y_1, B : B \subseteq Y_1$ " " $\}$

إنه أيا من A_i لا تنتمي إلى τ_Y ولا إلى τ_{Y_1} $\quad f_Y, f_{Y_1} \not\ni A_i$