الخميس ٩ محرم ١٤٣٩ هـ
١٩ تشرين (١) ٢٠١٧ م

المحاضرة السادسة

جبور لي القابلة للحل وجبور لي البسيطة:

جبور لي القابلة للحل

لتكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R

نعلم ان كل جبر لي هو مثالي مميز اذا $[A, A]$ مثالي مميز في A

وبالتالي يمكن لنا تشكيل المتتالية التالية.

$$D^0(A) = A$$
$$D^1(A) = [A, A]$$
$$D^2(A) = [D^1(A), D^1(A)]$$
$$\vdots$$
$$D^n(A) = [D^{n-1}(A), D^{n-1}(A)]$$

وحصلنا على متتالية من المثاليات مميزة تحقق ما يلي

$$A = D^0(A) \supseteq D^1(A) \supseteq \cdots \supseteq D^n(A)$$

متتالية متناقصة.

$$D^i(A) \supseteq D^{i+1}(A) \quad \forall i \geq 0$$
$$D^i(A) \supseteq (D^i(A), D^i A)$$

مثالي مميز في A ومنه مثالي في A

يتم المطلوب لأن كل مثالي في A هو جبر جزئي في A

تعريف: يقال عن جبر لي A انه قابل للحل اذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون

$$D^m A = \{0\}$$

ندعو m اصغر عدد صحيح موجب يحقق هذه المساواة بدليل

Galaxy
٣٠

ممكن ان يوجد اكثر من m لكنه يختار الاصغر

قابلية الحل

ملاحظة:

ان المتتالية المذكورة سابقاً ندعوها بالمتسلسلة المشتقة لجبر لي.

تعريف:

يقال عن المثالي J في جبر لي A انه قابل للحل اذا وجد عدد صحيح موجب يحقق $D^m J = \{0\}$

حيث m اصغر عدد صحيح موجب يحقق المساواة ويدعى دليل قابلية الحل

إن اكبر مثالي قابل للحل في جبر لي A ونرمز له $RadA$

نظرية (13) كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابل للحل.

A جبر لي و H جبر لي جزئي منه A

نفرض ان $D^r A = \{0\}$ بما ان A قابل للحل.

سنبرهن $D^r A \supseteq D^r H \quad \forall r \geq 0$

باستخدام الاستقراء الرياضي

من اجل $r = 0$ $\quad DH \subseteq DA$

$r = 1$

$$D^1 H = [H, H] \subseteq [A, A] = D^1 A$$

لنفرض ان القضية صحيحة من اجل r

وسنبرهن صحتها من اجل r+1

$$D^{r+1} H = [D^r H, D^r H] \subseteq [D^r A, D^r A] = D^{r+1} A$$

عندئذ القضية صحيحة من اجل اي عدد صحيح موجب وهي صحيحة من اجل $r = n$ $\quad D^n H \subseteq D^n A = \{0\}$ مما يوضح ان H جبر جزئي قابل للحل

ملاحظة: ان خاصية جبري جزئي لقابل للحل وراثية.

نظرية (14) : f أيستشاكل جبري القابل للحل A حيث $f: A \longrightarrow A$
عندئذ يكون $f(A)$ قابل للحل

بتعبير آخر إن الصورة المباشرة لجبري لقابل للحل وفق اي تشاكل يكون قابل للحل.

نعلم مسبقاً ان الصورة المباشرة لجبري وفق تشاكل هي جبري اي ان $f(A)$ جبري

بما ان A قابل للحل فإن $D^nA = \{0\}$

باستخدام الاستقراء الرياضي نبرهن $f(D^nA) = D^n(f(A))$.

نبرهن القضية من اجل $n=1$

$$f(D^1A) = f([A, A])$$

$$= [f(A), f(A)] = D^1(f(A))$$ كون A جبري

نفرض صحة القضية من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

$$f(D^{n+1}A) = f([D^nA, D^nA])$$

$$= [f D^nA, f D^nA]$$ بما ان f تشاكل

$$= [D^n f(A), D^n f(A)]$$ وحسب خواص جبري

$$= D^{n+1} f(A)$$

وهي صحيحة من اجل كل عدد صحيح موجب

$$\Rightarrow f(D^nA) = D^n f(A) \Rightarrow f(\{0\}) = \{0\}$$

نتيجة: كل جبر تبادلي يكون قابل للحل ودليله (1).

$$[A, A] = \{0\} \Rightarrow D^1A = \{0\}$$

Galaxy

مبرهنة (15): لتكن A جبري قابل للحل ولنفرض I مثالي في A

عندئذ: A/I قابل للحل

نعلم مما سبق ان A/I جبري

وبما ان $f(D^n A) = D^n f(A)$ حيث f تشاكل بين جبري لي

فإنه في حالة خاصة تكون القضية صحيحة من اجل تشاكل الغمر القانوني

فإنها صحيحة من $\pi : A \longrightarrow A/I$

اجل اي تشاكل بين جبري لي $x \longrightarrow x+I$

حيث $D^r(A/I) = \pi\, D^r(A)$

$= \pi(0) = I$

فالقضية صحيحة من اجل $r=n$.

$$D^n(A/I) = \pi(D^n A) = \pi(\{0\}) = I$$

عندئذ: A/I قابل للحل

ملاحظة: إن جبر الخارج هو جبري قابل للحل.

مبرهنة (١٦). A جبري على حلقة واحدية تبديلية $\mathbb{R}$ عندئذ

$\boxed{1}$ $D(D^r A) = D^{r+1} A \qquad r \geq 1$

$\boxed{2}$ $D^n(D^m A) = D^{n+m} A \qquad n, m \geq 1$

$\boxed{1}$ باستخدام الاستقراء الرياضي

نبرهن صحة القضية من اجل $r=1$

$$D(DA) = D[A,A] = [[A,A],[A,A]]$$
$$= [D^1A, D^1A] = D^2A$$

نفرض صحة القضية من اجل r وسنبرهن من اجل $r+1$

$$D(D^{r+1}A) = D[D^rA, D^rA]$$ لدينا

$$= [[D^rA, D^rA], [D^rA, D^rA]]$$

$$= [D(D^rA), D(D^rA)]$$

$$= [D^{r+1}A, D^{r+1}A]$$

$$= D^{r+2}A$$

[2] باستخدام الاستقراء الرياضي

نثبت صحة القضية من اجل $n=1$

$$D^1(D^mA) = D^{m+1}A$$

نفرض صحة القضية من اجل n

ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

$$D^{n+1}(D^mA) = D(D^n(D^mA))$$

$$= [D^n(D^mA), D^n(D^mA)]$$

$$= D(D^{n+m}A)$$

$$= D^{n+m+1}A.$$

انتهت المحاضرة السادسة.

لا تخلط بين شخصيتي واسلوبي

فشخصيتي هي انا

واسلوبي يعتمد عليك

المحاضرة السادسة

الاثنين ٣ صفر ١٤٣٩ هـ
٢٣ تشرين (١) ٢٠١٧ م

س: دورة: مبرهنة (١٧) ليكن A جبري وليكن I مثالي في A مقابل للحل فيه
فإذا كانت A/I قابل للحل عندئذ تكون A قابل للحل.
أي A/I قابل للحل و I مثالي قابل للحل ⇐ A قابل للحل.

نفرض ان m و n دليلا قابلية الحل للمثالي I وجبر A/I عندئذ

$$D^n I = \{0\} \qquad D^m(A/I) = I$$

حسب مبرهنة سابقة (الفرض الاستقرائي لها)

$$\forall r \geq 1 \quad \text{تشاكل } f \text{ حيث } \quad f(D^r A) = D^r f(A)$$

وبصورة خاصة ان المساواة صحيحة من اجل التشاكل العمر القانوني π

$$\boxed{\pi(D^r A) = D^r(\pi(A))} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \pi(D^m A) = D^m(\pi A) = D^m(A/I) = I$$

$$; \ \pi : A \longrightarrow A/I$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi(D^m A) = I} \qquad \#$$

برهنة أخرى باستخدام الاستقراء الرياضي نبرهن ان

$$\boxed{\pi(D^r A) = D^r A + I} \quad (2)$$

عندما $r=1$

$$\begin{aligned}
\pi(DA) &= \pi([A, A]) \\
&= [\pi(A), \pi(A)] \\
&= [A/I, A/I] \\
&= [A, A] + I \\
&= DA + I
\end{aligned}$$

/ /

نفرض ان صحة القضية من اجل r

ونبرهن صحتها من اجل $r+1$

$$\pi(D^{r+1}A) = [\pi(D^rA), \pi(D^rA)]$$
$$= [D^rA + I, D^rA + I]$$
$$= [D^rA, D^rA] + I$$
$$= D^{r+1}A + I$$

عندئذ القضية محققة من اجل $r+1$ فهي صحيحة $\forall r \geq 1$

وبالتالي فهي صحيحة من اجل اي عدد صحيح موجب وليكن m

$$\boxed{\begin{aligned}\pi(D^mA) &= D^m(\pi(A))\\ &= D^mA + I\end{aligned}}\ \star$$

من $\star$ و $\#$ نجد ان

$$D^mA + I = I$$
$$\Rightarrow D^mA \subset I$$
$$\Rightarrow D^n D^mA \subseteq D^n I$$

حسب نتيجة ما سبق انه اذا كان $B \subseteq H$ فان $D^rH \subseteq D^rB$

من الفرض

$$\Rightarrow D^{n+m}A \subseteq D^n I = \{0\}$$
$$\Rightarrow D^{n+m}A = \{0\}$$

ومنه نجد ان A جبر لي قابل للحل

س: مبرهنة (١) A حلقة عندئذ تقاطع مثاليين قابلين للحل هو مثالي قابل للحل

لنفرض ان I, J مثاليين قابلين للحل من حلقة A

والمطلوب أن $I \cap J$ مثالي قابل للحل

اي علينا اثبات أن $I \cap J$ مثالي وقد تم سابقاً

ولنفرض انه قابل للحل

نعلم سابقاً ان تقاطع مثاليين هو مثالي

من جهة أخرى $I \cap J \subseteq I$

ولدينا $I \cap J$ مثالي فهو حلقة جزئية

I حلقة جزئية قابل للحل "من الفرض"

عندئذ كل حلقة جزئية من حلقة جزئية قابل للحل هو قابل للحل

فإن $I \cap J$ قابل للحل

س: مبرهنة (٢) ان مجموع مثاليين قابلين للحل هو مثالي قابل للحل

لنفرض ان I, J مثاليين قابلين للحل

نعلم سابقاً ان مجموع مثاليين هو مثالي اي $I+J$ مثالي

من جهة أخرى $I \cap J \subseteq I$

حيث I مثالي قابل للحل ، $I \cap J$ مثالي

عندئذ يمكن بناء حلقة الخارج $I / I \cap J$

أيضاً لدينا $J \subseteq I + J$

حيث J مثالي قابل للحل ، $I + J$ مثالي فهو حلقة جزئية

عندئذ حسب مبرهنة التماثل الثالثة

$$(1)\ \frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}\ (2)$$

/ /

في ② ان I قابل للحل فانه يوجد $\frac{I}{I \cap J}$ قابل للحل اعتماداً على مبرهنة .

ومن ① ان J قابل للحل فانه يوجد تماثل قابل للحل عندها $\frac{I+J}{J}$ قابل للحل عندئذ $J+I$ قابل للحل .

مبرهنة (٢) ليكن J , I مثاليين قابلين للحل في جبر لي A عندئذ $[I,J]$ يكون قابل للحل

نعلم ان $[I,J]$ مثالي في جبر لي ولنبرهن انه قابل للحل .

ولدينا $[I,J] \subseteq I$ ووفقاً لطريقة بناء هذا المثالي

يجا ان كل من I و $[I,J]$ جبر جزئية من جبر لي A

ولكون كل جبر جزئي من جبر لي قابل للحل هو جبر قابل للحل

فاننا نستنتج ان $[I,J]$ قابل للحل

نتيجة (٣) اذا كان A جبر لي و $DA = [A,A]$ مثالي قابل للحل في جبر لي A عندئذ يكون A قابل للحل

نشكل جبر الخارج $A/_{DA}$ نجد ان

$$[A/DA , A/DA] = [A,A] + DA$$

$$= DA + DA = DA$$

وهذا يعني ان A/DA تبادلي وهو قابل للحل ودليله (١)

ولدينا من الفرض DA قابل للحل عندئذ استناداً المبرهنة سابقة يكون A قابل للحل .

جبور لي نصف البسيطة

- يقال عن جبر لي انه نصف بسيط اذا لم يحوي اي مثالي حقيقي تبادلي مغلق

ملاحظة: يكون الجبر تبادلي اذا احقق $[I, I] = \{0\}$

- نقول عن مثالي انه حقيقي اذا احقق $A \neq J \neq \{0\}$

اساس الجبر هو اكبر مثالي قابل للحل في جبر لي ونرمزله Rad

نظرية (٤): A جبر لي عندئذ القضايا التالية متكافئة:

★ ان A جبر لي نصف بسيط.

A لا يملك اي مثالي حقيقي قابل للحل

$ $\mathrm{Rad}\, A = \{0\}$.

(★ $\Rightarrow$ #) نفرض ان A جبر لي نصف بسيط
ولنفرض انه لا يملك اي مثالي حقيقي قابل للحل
نفرض جدلاً انه يوجد مثالي حقيقي قابل للحل في A وليكن J دليله r عندئذ $D^r J = \{0\}$

$$[D^{r-1}J, D^{r-1}J] = \{0\}$$

من الواضح ان $D^{r-1}J$ مثالي تبادلي في جبر لي

اضافة الى ذلك $D^{r-1}J \neq 0$

لان r دليل قابلية الحل لـ J فهو اصغر عدد موجب يحقق ذلك واصغر منه لا يحقق ذلك.

كما انه حسب بناء السلسلة المشتقة في جبر لي يكون

$$D^{r-1}J \subseteq D^{r-2}J \subseteq \dots \subseteq DJ \subseteq J \subsetneq A$$

لكون J مثالي حقيقي

$$\Rightarrow 0 \neq D^{r-1}J \subsetneq A$$

اذاً تمكنا من ايجاد مثالي حقيقي تبادلي في جبر A وهذا يناقض كون

A جبر نصف بسيط ⇐ الفرض الجدلي خاطئ

(* ⇐ #) بما ان A لا تملك اي مثالي حقيقي قابل للحل
بما ان كل مثالي تباديلي هو حقيقي فان A لا تملك
مثالي ~~مثالي~~ حقيقي تباديلي عندئذ A جبر نصف بسيط.

($ ⇐ #) ~~اذا كان A~~ يترك لما بعد

(# ⇐ $) نفرض ان $Rad A=\{0\}$ فان A لا تملك مثالي حقيقي قابل للحل وذلك لان Rad اكبر مثالي قابل للحل.

(* ⇐ $) نفرض $Rad A=\{0\}$
نفرض جدلا انه يوجد مثالي حقيقي تباديلي في A وليكن J
وبما انه تباديلي فهو قابل للحل وهذا يناقض كون
$Rad A=\{0\}$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ ⇐ A نصف بسيط.

انتهت المحاضرة السابعة

متى في وطن الموت كان هنالك أمل...