نظري

◄ دكتور المادة: ريما القمحة

◄المحاضرة: الخامسة عشر عنوان المحاضرة: **Critical points**

بعض المفردات هامة لفهم النص

Critical points	نقاط حرجة	Behavior	سلوك
Extreme points	نقاط حدية	Convexity	تحدب
Minimum	صغرى	Concavity	تقعر
Maximum	كبرى	Inflexion	انعطاف
even	زوجي	Primitive	أصلي
Odd	فردي	Indefinite	غير محدد
Periodic	دورية	Integral	تكامل
Constancy	ثبات	Basic	أساسي
constant	ثابت	Properties	خصائص
interior	داخلي	Segment	قطعة ـجزء ـمجال
ascertain	تأكد		

Critical points : A domain interior points , in which a derivative of a function is equal to zero or doesn't exist , are called critical points of this function . These points are very important at analysis and drawing a function graph , because only they can be points , in which a function has extreme (minimum or maximum fig.5a,b)

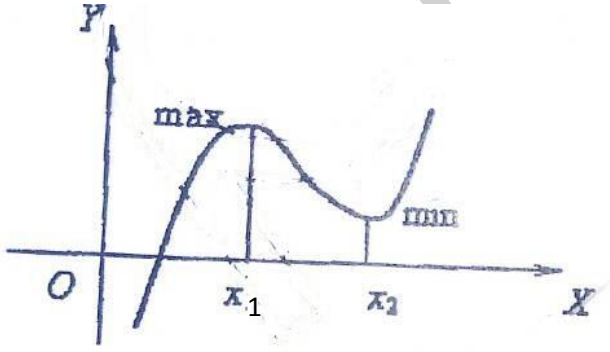


Fig. 5a

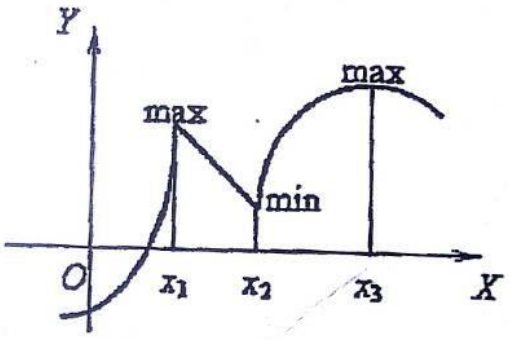


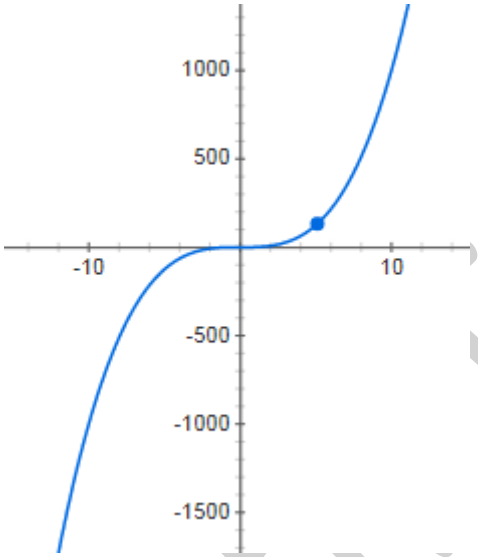
Fig. 5b

At points x_1, x_2 fig(5.a) and x_3 (fig 5.b) a derivative is equal to 0 ; at points x_1, x_2 (Fig 5b) a derivative doesn't exist . But all they are points of extreme .

Necessary condition of extreme . If x_0 is an extreme point a function f(x) and a derivative f' exists at this point , then $f'(x_0)=0$

This theorem is necessarily , condition of extreme . If a derivative of function at some point is equal to zero . then it's not necessarily that the function has an extreme at this point , For instance , a derivative of the function $f(x) = x^3$ is equal to 0 at x=0 , but this function has no extreme at this point (Fig 6)

Fig6



One the other hand , the function y=|x| , represented on fig3 , has a minimum at the point x=0 , but there is no derivative at this point.

Sufficient, the conditions of extreme . If a derivative changes its sign from plus to minus at a point x_0 , then x_0 is appoint of maximum . If a derivative changes its sign from minus to plus at a point x_0 , then x_0 is a point of minimum

Plan of function investigation : To draw graph of a function it is necessary :

1. To find a domain and codomain of a function.
2. To ascertain if the function is even or odd
3. To determine if the function is periodic or not
4. To find zeros of the function and its values at x=0
5. To find intervals of a sign constancy
6. To find intervals of monotony
7. To find point of extreme and values of a function in these points
8. To analyze the behavior of a function near "special" points and at a great modulus of x

Convexity , concavity , and inflexion points of a function

The second derivative . Convex and concave function .

Sufficient condition of concavity (convexity) of a function.

Inflexion point.

The second derivative if a derivative $f'(x)$ of a function f(x) which is differentiable in the point (x_0) , then its derivative is called the second derivative of the function f(x) in the point x_0 and denoted as $f''(x_0)$.

A function f(x) is called convex in an interval (a,b) if a graph of the function f(x) is placed in this interval lower than a tangent line ,going through any point $(x_0, f(x_0))$: $x_0 \in (a,b)$.

A function f(x) is called concave in an interval (a,b) if a graph of the function f(x) is placed in this interval higher than a tangent line ,going through any point $(x_0, f(x_0))$: $x_0 \in (a,b)$.

Sufficient condition of concavity (convexity) of a function . (هامة)

Let a function f(x) be twice differentiable (i.e it has the second derivative) in an interval (a,b) ; if $f''(x) > 0$ for any x∈(a,b) , then the function f(x) is concave in interval (a,b) ; if $f''(x) < 0$ for any x∈(a,b) , then the function f(x) is convex in interval (a,b) .

If a function changes a convexity to concavity or vice versa at passage through some point , then this point is called and inflexion point an inflexion point . Hence it follows , that if the second derivative f'' exists in an inflexion point x_0 then $f''(x_0)=0$

Primitive , indefinite integral

Primitive , Finding of primitive : infinite set of solution

Indefinite integral . Constant of integration

Primitive A continuous function F(x) is called primitive for a function f(x) on a segment X , if for each x∈ X ; F'(x)=f(x)

Indefinite integral of a function f(x) on a segment X is a set of all its primitive . This is written as : $\int f(x)dx = F(x) + C$,

Where C – any constant , called constant of integration .

Syria Math Team

Basic properties of indefinite integral

If a function f(x) has a primitive on a segment X , and k – a number ,then

$$\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$$

If functions f(x) and g(x) have primitive on a segment X ,then :

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

If a function f(x) has a primitive on a segment X, then for interior points of this segment :

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

If f(x) is a continuous function in a segment X and differentiable in interior points of this segment , then :

$$\int df(x) = f(x) + C$$

الترجمة :

النقطة الحرجة : النقاط الداخلية لمجموعة التعريف و التي يكون عندها المشتق يساوي الصفر أو غير موجود، تدعى بالنقاط الحرجة للدالة .

-تعتبر هذه النقاط هامة جداً في تحليل و رسم بيان الدالة ، لأنها هي فقط النقاط الوحيدة التي يكون عندها للدالة قيم حدية (صغرى أو عظمى) الشكل 5a,b (انظر الشكل في الصفحة ١)

-عند النقاط x_1, x_2 (الشكل 5a) و x_3 (الشكل 5b) المشتق يساوي الصفر ، في النقاط x_1, x_2 (الشكل 5b) المشتق غير موجود و لكن جميعها نقاط حدية.

الشروط اللازمة للحدية : إذا كانت x_0 نقطة حدية للدالة f(x) و المشتق f' موجود عند هذه النقطة ، عندئذٍ $f'(x_0) = 0$

-هذه النظرية هي الشرط اللازم للحدية . إذا كان مشتق الدالة عند نقطة ما يساوي الصفر ، عندئذٍ ليس من الضروري أن تكون الدالة حدية عند هذه النقطة . على سبيل المثال $f(x) = x^3$ يساوي إلى الصفر عند النقطة x=0 و لكن هذه الدالة ليست حدية عند هذه النقطة (الشكل ٦) " انظر الشكل في الصفحة ٢"

-من جهة أخرة الدالة y=|x| مُثلت في الشكل ٣ (في المحاضرة السابقة) لها نقطة حدية صغرى هي x=0 و لكن ليس لها مشتق عند هذه النقطة .

الشرط الكافي للحدية : إذا غير المشتق إشارته عن الموجب إلى السالب عند نقطة x_0 عندئذٍ هي نقطة حدية عظمى

- إذا غير المشتق إشارته عن السالب إلى الموجب عند نقطة x_0 عندئذٍ هي نقطة حدية صغرى

-مخطط لدراسة الدوال (دراسة تغيرات الدالة) :

لرسم الخط البياني للدالة من الضروري :

١- إيجاد منطلق و مستقر الدالة
٢- التحقق إذا كانت الدالة زوجية أم فردية
٣- التحقق فيما إذا كانت الدالة دورية (تكرارية) أم لا
٤- إيجاد جذور (حلول) الدالة و قيمها عند $x=0$
٥- إيجاد مجالات ثبات الإشارة
٦- إيجاد مجالات إطراد الدالة
٧- إيجاد النقاط الحدية و قيم الدالة عند هذه النقاط
٨- تحليل سلوك الدالة قرب نقاطة و خاصة عند المعاملات العظمى لـ x

تحدب – تقعر و نقاط انعطاف دالة:

المشتق الثاني ، و تحدب و تقعر دالة

الشرط الكافي لتحدب (تقعر) دالة

نقاط الانعطاف

-المشتق الثاني : إذا كان المشتق $f'(x)$ للدالة $f(x)$ قابلاً للتفاضل عند النقطة x_0 عندئذٍ يدعى مشتقها بالمشتق الثاني للدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 و يرمز له $f''(x_0)$

-تدعى الدالة $f(x)$ محدبة في المجال (a,b) إذا كان بيان الدالة $f(x)$ واقع ضمن هذا المجال تحت خط المماس المار في أي نقطة $x_0 \in (a,b)$: $(x_0, f(x_0))$

- تدعى الدالة $f(x)$ مقعرة في المجال (a,b) إذا كان بيان الدالة $f(x)$ واقع ضمن هذا المجال فوق خط المماس المار في أي نقطة $x_0 \in (a,b)$: $(x_0, f(x_0))$

-الشرط الكافي لتقعر (تحدب) دالة :

لتكن الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل مرتين (هذا يعني أن لها مشتق ثانٍ) في المجال (a,b) عندئذٍ ، إذا كان :

- $f''(x) > 0$ من أجل أي نقطة $x \in (a,b)$ عندئذٍ للدالة $f(x)$ مقعرة في المجال (a,b)
- $f''(x) < 0$ من أجل أي نقطة $x \in (a,b)$ عندئذٍ للدالة $f(x)$ محدبة في المجال (a,b)

-إذا تغيرت الدالة من التحدب إلى التقعر أو العكس عند مرورها بنقطة من عندئذٍ هذه النقطة تدعى نقطة انعطاف

و بالتالي و هكذا إذا كان المشتق الثاني f'' موجود عند نقطة الانعطاف x_0 عندئذٍ $f''(x_0) = 0$

Syria Math Team

ـالدالة الأصلية و التكامل غير المحدد

الدالة الاصلية – إيجاد الدالة الأصلية – مجموعة غير منتهية من الحلو

التكامل غير المحدد – ثابت التكامل

ـالدالة الأصلية : الدالة المستمرة $F(x)$تدعى التابع الأصلي للدالة $f(x)$ على القطعة X من أجل كل $x \in X$ و يكتب بالشكل :

$$F'(x) = f(x)$$

التكامل غير المحدد للدالة : التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على المجال X هو مجموعة كل الدوال الأصلية وهذا يكتب بالشكل :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث C ثابت يدعى ثابت التكامل

ـالخصائص الأساسية للتكامل غير المحدد :

إذا كانت الدالة $f(x)$ لها دالة أصلية على القطعة X و k عدد ما عندئذٍ:

$$\int kf(x)dx = \int f(x)dx$$

ـإذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ لها دوال أصلية على الجزء X عندئذٍ:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ـإذا كانت الدالة $f(x)$ لها دالة أصلية على الجزء X عندئذٍ من أجل النقاط الداخلية من هذا الجزء :

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

ـإذا كانت الدالة f(x) مستمرة على الجزء X و قابلة للمفاضلة في النقاط الداخلية من هذا الجزء عندئذٍ

$$\int df(x) = f(x) + C$$

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي

Syria Math Team