حل أسئلة الدورات

أسئلة الدورة الفصلية الثالثة (٢٠١٧) :

السؤال الأول :

١) لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . المطلوب :
- اذكر نص كلاً ن الشرط الأصغري و مبدأ الاستقراء
- أثبت انه اذا كانت المجموعة P تحقق الشرط الأصغري فإن المجموعة P تحقق مبدأ الاستقراء .

٢) اذكر نص كلاً من تمهيدية زورن وموضوعة الاختيار .

٣) أثبت أن كل مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة الأعداد الطبيعية N^* تكون قابلة للعد .

٤) عرف كلاً من العنصر الأصغر والعنصر الأصغري في المجموعة المرتبة ثم أثبت أن كل عنصر أصغر هو عنصر اصغري ثم أورد مثالاً تبين فيه ان العكس غير صحيح بالضرورة .

السؤال الثاني : لتكن $(G,.)$ زمرة .والمطلوب :

١) أثبت أن الزمرة G تكون تبديلية .إذا تحقق الشرط الاتي: $\forall x,y\in G$ فإن $(x.y)^{-1}=x^{-1}.y^{-1}$.

٢) أثبت انه اذا كانت $G=<a>$ دوارة منتهية مرتبتها n .عندئذ $G=<a^k>$ حيث $k\,\epsilon\,Z$ عندما وفقط عندما $\gcd(k,n)=1$.

٣) اذا كانت $(G:1)=9$ ، أثبت أنه إما تماثل $G\cong Z_9$ أو أن $G\cong Z_3\oplus Z_3$.

٤) لتكن k,H زمرتين جزئيتين في G إذا كانت الزمرة الجزئية k ناظمية في G أثبت أنه :

$$\frac{H.k}{k}\cong\frac{H}{H\cap k}$$

٥) أثبت أن مجموعة التماثلات الداخلية $\mathrm{Inn(G)}$ للزمرة G تشكل زمرة جزئية ناظمية في زمرة التماثلات $\mathrm{Aut(G)}$ للزمرة G وان $\mathrm{G/Z(G)}\cong\mathrm{Inn(G)}$.

٦) لنفرض أن $G=Z$ زمرة الاعداد الصحيحة . أثبت أنه لأجل اي عدد صحيح $m>1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G . وهل من اجل $m=5$ تكون 5 زمرة جزئية في G أو تماثل $5Z$. ؟

السؤال الثالث : لتكن $\mathbb{Z}_9$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 9 المطلوب

١) أوجد عناصر الزمرة $\mathbb{Z}_9$. ثم شكل جدول تبين فيه نظير ومرتبة كل عناصر $\mathbb{Z}_9$.

٢) أوجد الزمرتين الجزئيتين $<3>$ ، $<2>$ المولدتين بالعنصرين $3\in\mathbb{Z}_9$ ، $2\in\mathbb{Z}_9$ على الترتيب .

٣) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية $K=<3>$ في الزمرة $\mathbb{Z}_9$ ثم أوجد زمرة الخارج $\mathbb{Z}_9/K$.

٤) هل الزمرة $\mathbb{Z}_9/K$ دوارة مع البرهان .

٥) أوجد الزمرة H التي تحقق $\mathbb{Z}_9/K\cong H$

٦) بفرض أن $\mathbb{Z}_4$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 4 .هل الزمرة $\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_4$ دوارة ولماذا .؟ ثم أوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $\mathbb{Z}_9\oplus\mathbb{Z}_4$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثالثة (٢٠١٧) :

السؤال الأول

١) - الشرط الأصغري : كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .
مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما
_a إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

_b ولتكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ . عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

- لنفرض M هي مجموعة العناصر P التي لا تحقق القضية θ إذا كانت :

١) $M = \phi$ يتم المطلوب.
٢) $M \neq \phi$ عندئذ وحسب الفرض فإن يوجد في M عنصر أصغري وليكن a
بالتالي a لا يحقق القضية θ .
وايضا a ليس أصغريا في P لآنه لا يحقق القضية θ .
ومنه يوجد عنصر $x \in P$ بحيث $x < a$ وان $x \neq a$.
وبالتالي فإن $x \notin M$ وهذا يبين ان العنصر x يحقق القضية θ.

وحسب الفرض b فإن العنصر a يحقق القضية θ وهذا غير ممكن وبالتالي $M = \phi$.
أي ان جميع عناصر المجموعة p تحقق القضية θ.

٢) تمهيدية زورن : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى (ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

موضوعة الاختيار : لتكن A مجموعة ما وغير خالية عندئذ يوجد تطبيق :

$$L = P(A) \backslash \emptyset$$

عندئذ يوجد تطبيق :

$$f : L \to A$$

$$\forall B \in L \;\; ; f(B) \in B \subset A$$

٣) لتكن D مجموعة جزئية وغير منتهية في N^* .

نريد إثبات أن

$$card\ D = card\ N^*$$

ولنفرض أن a_1 هو عنصر أصغر في D .

لنأخذ المجموعة $D \setminus \{ a_1\}$ ولنفرض أن a_2 هو العنصر الأصغر فيها

لنأخذ المجموعة $D \setminus \{ a_1, a_2\}$ ولنفرض أن a_3 هو العنصر الأصغر فيها

لنأخذ المجموعة $K = \{ a_1, a_2 \dots \dots \dots . a_n\}$ والتي فيها a_n هو العنصر الاصغر للمجموعة

$$D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1}\} \quad : \forall n \in N^*$$

لنعرف العلاقة

$$f : N^* \to K$$
$$: \forall\, n \epsilon N^* \quad ; f(n) = a_n$$

إن f تطبيق لأنه إذا كان $n, m\epsilon N^*$ بحيث $n = m$ عندئذ :

$$f(n) = a_n$$
$$f(m) = a_m$$
$$\Longrightarrow f(n) = f(m)$$

إن f متباين لأنه إذا كان $n, m\ \epsilon N^*$ بحيث $f(n) = f(m)$ عندئذ

لنفرض جدلاً أن $n \neq m$ وان $n > m$ عندئذ تكون

$$\{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1}\} \subset \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1}\}$$

ومنه تكون $D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{n-1}\} \subset D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1}\}$

وبالتالي $a_n, a_m \in D \setminus \{ a_1, a_2, a_3 \dots \dots , a_{m-1}\}$

وأن $a_n > a_m$ وهذا تناقض كون $f(n) = f(m)$ وبالتالي $n = m$ اي أن f متباين .

نستنتج ان $f : N^* \to D$ انه تطبيق متباين

وايضا لما كانت $D \subset N^*$ فإن العلاقة $g : D \to N^*$

$$\forall d \in D; g(d) = d$$

فالعلاقة هي تطبيق متباين

وحسب مبرهنة ((كانتور – برنشتاين)) نجد أن

$$card\ D = card\ N^*$$

وهو المطلوب

٤) **تعريف :** ليكن $(P , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P ;\ a \leq x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P ; y \leq b \Rightarrow y = b$$

- ليكن $a \in P$ عنصر أصغر في P :

هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall x \in P \quad ; a \leq x \dots\dots\dots\dots (*)$$

ولنفرض أن b عنصر اصغري في P :

و هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall y \in P ; y \leq b \Rightarrow y = b \dots\dots.. \ (**)$$

ولكن $(*)$ محققة من أجل جميع قيم x من P وبفرض أن $x = b$ وبالاستفادة من $(**)$ نجد ان $a = b$ ومنه العنصر الاصغر يكون عنصر أصغري .

المثال المعاكس : لتكن $A = \{ a, b, \}$ مجموعة ما و لنأخذ المجموعة

$$f = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$\{a\}$ عنصر أصغري لأنه كل عنصر محتوى فيه يساويه ، بينما هو ليس عنصر أصغر لأن $\{a\} \not\subset \{b\}$

السؤال الثاني

١) لدينا $(x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$ ونعلم أن $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$

وبالتالي $x^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$ نضرب ب x من الطرفين

$$x.(x^{-1}.y^{-1}).x = x.(y^{-1}.x^{-1}).x$$

وان G تجميعية ومنه

$$y^{-1}.x = x.y^{-1}$$

نضرب ب y من الطرفين

$$y.(y^{-1}.x).y = y.(x.y^{-1}).y$$

وان G تجميعية ومنه

$$x.y = y.x$$

ومنه الزمرة G تكون تبديلية.

٢) - لنفرض أن $G =< a^k >$ ولنفرض جدلا أن $\gcd(k,n) = d > 1$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ حيث :

$k = s.d$ و $n = t.d$

حيث $1 < t < n$, $1 < s < k$

$$(a^k)^t = (a^{sd})^t = a^{tds} = (a^{td})^s = (a^n)^s = e$$

سنحصل الان على t عنصراً و t اصغر من n وبالتالي لن يكون مولد لـ G و $G \neq < a^k >$ وهذا يناقض الفرض ومنه

$$\gcd(k,n) = 1$$

- لنفرض أن $\gcd(k,n) = 1$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث:

$1 = s.k + t.n$ ولنبرهن أن $G =< a^k >$.

$$a = a^1 = a^{s.k+t.n} = a^{s.k}.a^{t.n}$$

$$\Rightarrow \quad = (a^k)^s.\underbrace{(a^n)^t}_{e} = (a^k)^s \in < a^k >$$

$$G \subseteq < a^k >$$

ولدينا $a^k \in < a^k >$ حيث هي أصغر زمرة تحوي $a^k \Leftarrow < a^k > \subseteq < a >$

$$< a^k > = < a > = G$$

٣) لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1) = 9$ أن G تبديلية لأن $(G:1) = 3^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G \cong Z_9$
- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 3 ولتكن K إنK دوارة وبالتالي $K =< a > : a \in K$ ومنه $K \subsetneq G$ اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$

ولنضع $H = < b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 3 أي أن $(H:1) = 3$ حيث أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G
ومنه $H = \{e, b, b_1\}$ $\quad\quad$ $\mathrm{K} = \{e, a, a_1\}$

إن كل H, K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \in K \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^3 = e \ ; y \in K$$
$$y^3 = e \ ; y \in H$$

ومنه فإن $o(y) = 3$ وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} \quad \text{قانون حفظ}}$$

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 9$$

وبالتالي

$$G = K \times H$$

ونعلم انه

$$G = K \times H \cong K \oplus H =$$

ومنه

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_3 \oplus Z_3$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_9 واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_3 \oplus Z_3$

٤) لنعرف العلاقة : $f : H \to \frac{H.K}{k}$ بالشكل :

$$\forall\, h \in H \quad ; \quad f(h) = h.k$$

وحسب تعريفنا للجداء فإن $H \subseteq H.K$ فنجد أن f تطبيق لأنه إذا كان :

$$h_1, h_2 \in H \quad : \; h_1 = h_2 \implies h_1.k = h_2.k$$

$$\implies f(h_1) = f(h_2)$$

وأيضاً f تشاكل :

$$f(h_1.h_2) = (h_1.h_2).k$$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج

$$= (h_1.k).(h_2.k) = f(h_1).f(h_2)$$

وهذا غامر لأن إذا كان $\bar{z} \in \frac{H.K}{k}$ حيث $\bar{z}$ مرافقة للزمرة k في $H.K$ عندئذ يوجد $g \in H.K$ بحيث $\bar{z} = g.k$

وبما أن $g \in H.K$ فإنه حسب تعريف الجداء :

$$h \in H \;,\; x \in k \quad ; \; g = h.x$$

ومنه $\bar{z} = g.k = (h.x).k$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج :

$$\bar{z} = (h.k)(x.k)$$

$$\bar{z} = (h.k).k = h.k$$

$$f(x) = x.k = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{H.k}{k} \cong \frac{H}{\ker f}$

$$\ker f = H \cap k$$

ليكن $a \in \ker f$ عندئذ :

$$f(a) = \underbrace{k}_{\text{محايد المستقر}}$$

وحسب التعريف فإن : $f(a) = a.k$

وهنا نجد أن $a.k = k$ وبالتالي $a \in k$

وكون $\ker f$ في المنطلق فإن $a \in H$ فنجد أن $a \in H \cap k$ وبالتالي

$$\ker f \subseteq H \cap k$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $b \in H \cap k$ وطالما $b \in H$ فنأخذ الصورة المباشرة $b \in k$ حيث :

$$f(b) = b.k = k$$

عنصر في المنطلق مرتبط بالمحايد في المستقر ومنه :

$b \in \ker f$ أي أن $H \cap k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد : $H \cap k = \ker f$ و عليه يكون :

$$\frac{H}{H \cap K} = \frac{H}{Ker(f)} \cong \frac{H.K}{H}$$

٥) لنبرهن أن $\mathrm{Inn}(G)$ تتشكل زمرة جزئية في الزمرة $\mathrm{Aut}(G)$.
لنعرف العلاقة

$$T_a : G \to G \quad : \quad \forall\, x \in G \ ; \ T_a(x) = a.x.a^{-1}$$

ولنأخذ مجموعة التماثلات الداخلية $Inn(G)$

$$Inn(G) = \{T_a \ : \ a \in G\}$$

إن $\emptyset \neq \mathrm{Inn}(G)$ لأن $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$

ليكن $T_a, T_b \in \mathrm{Inn}(G)$ حيث $a, b \in G$ ولنبرهن أن

$$T_a \overset{\text{عملية تركيب تطبيقات}}{\circ} T^{-1}{}_b \in \mathrm{Inn}(G)$$

$$\forall\, x \in G \quad ; \quad \overbrace{T_a . T^{-1}{}_b}^{\text{تطبيق}}(x) = T_a\big(T^{-1}b(x)\big)$$

$$= T_a(b^{-1}.x.b) = a(b^{-1}.x.b)a^{-1}$$

$$(a.b^{-1})x(b.a^{-1}) = (a.b^{-1})x(a.b^{-1})^{-1} = \overbrace{T_{ab^{-1}}}^{\text{تطبيق}}(x)$$

بما أن $ab^{-1} \in G$ فإن $T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$ وهذا يبين أن :

تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق: $T_a . T^{-1}{}_b = T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$

ومنه $Inn(G)$ زمرة جزئية في الزمرة $Aut(G)$. ولنبرهن انها ناظمية في $Aut(G)$.

- ليكن $g \in Aut(G)$ ولنبرهن على أن $g. Inn(G). g^{-1} \subseteq Inn(G)$

ليكن $f \in g. Inn(G). g^{-1}$ عندئذ يوجد $T_a \in Inn(G)$: $f = g. T_a. g^{-1}$

لدينا $f = g. T_a. g^{-1} \in Aut(G)$

ليكن $x \in G$ عندئذ :

$$f(x) = (g. T_a. g^{-1})(x) = (gT_a)(g^{-1}(x)) = g(a. g^{-1}(x). a^{-1})$$

$$= g(a)g\big(g^{-1}(x)\big). g(a^{-1}) = g(a). x. g(a^{-1})$$

$$= g(a). x. \big(g(a)\big)^{-1} = T_{g(a)}\ (x)$$

وبالتالي $f = g. T_a. g^{-1} = T_{g(a)} \in Inn(G)$

وهكذا نجد أن $Inn(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $Aut(G)$.

ولنثبت الأن $G/Z(G) \cong Inn(G)$

$Inn(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $Aut(G)$ وبالتالي $Inn(G)$ معرف .

$Z(G)$ زمرة جزئية ناظمية في G وبالتالي $G/Z(G)$ معرف .

لنعرف العلاقة : $\varphi : G \to Inn(G)$ بالشكل الاتي

$$\forall a \in G \ ; \ \varphi(a) = T_a$$

إن φ تطبيق لأن إذا كان $a, b \in G$: $a = b$ فإن $a^{-1} = b^{-1}$ و أن:

$$\forall x \in G \ ; \ a. x. a^{-1} = b. x. b^{-1}$$

$$\Longrightarrow T_a(x) = T_b\ (x)$$

ومنه $T_a = T_b$ لأنهما تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق .

$$\Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

إن φ تشاكل و لإثبات ذلك سنثبت أن : :

$$\varphi\left(\underbrace{ab}_{\in G}\right) = T_{ab}$$

$$\forall x \in G\ ;\ T_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} = (ab)x(b^{-1}a^{-1})$$

$$= a(b.x.b^{-1})a^{-1} = T_a\,(b.x.b^{-1}) = \underbrace{T_{ab}}_{\text{تطبيق}}\,(x) = (T_a.T_b)(x)$$

ومنه : $T_{ab} = T_a.T_b$ تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق

ومنه : $\varphi(a.b) = T_{ab} = T_a.T_b = \varphi(a).\varphi(b)$

إن φ غامر لأنه :

أيا كان $T_d \in Inn(G)$ فإن $d \in G$

فإن $T_d = \varphi(d) = T_d$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى :

$$G/\ker\varphi \cong Inn(G)$$

ولنبرهن أن $\ker\varphi = Z(G)$

ليكن $a \in Z(G)$ عندئذ حسب التعريف $ax = xa$ $\overset{a^{-1}\text{ نضرب بالعنصر}}{\Leftrightarrow}$ $a.x.a^{-1} = x$

ومنه $T_a(x) = T_e(x)$ $\overset{\text{تساوا عند كل عنصر من عناصر المنطلق}}{\Leftrightarrow}$ $T_a = T_e = \varphi(a)$

اي أنه $Z(G) \subseteq \ker\varphi$

ليكن $b \in \ker\varphi$ عندئذ :

$$T_b = T_e \Leftarrow \begin{cases} \varphi(b) = T_e & \text{حسب التعريف النواة} \\ \varphi(b) = T_b & \text{حسب التعريف} \end{cases}$$

وكون المنطلق لكل منهما هو G إذا يتساوا عند كل عنصر من عناصر G فإن :

$$\forall x \in G \quad \text{فإن} \quad T_e(x) = T_b(x)$$

$$b.x.b^{-1} = exe^{-1} = x$$

$$\overset{\text{نضرب بالعنصر b}}{\Rightarrow} \quad bx = xb$$

إن b يتبادل مع جميع العناصر فإن $b \in Z(G)$ ومنه $\ker\varphi \subseteq Z(G)$

ومن الاحتوائين $Z(G) = \ker\varphi$

اي أن

$$G/\ker\varphi = G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$$

٦) لنثبت أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $(\mathbb{Z},+)$ أي لنثبت أن :

$$m\mathbb{Z} = \{m.n \quad : \quad n\epsilon\mathbb{Z}\}$$

إن $\emptyset \neq m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ لأن $0 \in m\mathbb{Z}$ على الأقل .

ليكن $x, y \in m\mathbb{Z}$ عندئذ يوجد $\varphi, \beta \in m\mathbb{Z}$ بحيث :

$$x = m.a \quad , y = mb$$

$$\Rightarrow x - y = m.a - m.b = m(a-b)$$

$$\Rightarrow (a-b) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

وبالتالي $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$

نلاحظ أن $(\mathbb{Z}_5,+)$ ليست زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن العملية المعرفة عليها ليست ذات العملية المعرفة على $\mathbb{Z}$.

كما أن 5 لا تماثل $5\mathbb{Z}$ وذلك بملاحظة ما يلي :

$$\alpha : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$$

لنفرض جدلاً أن $5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$

$$\alpha(5) = \alpha(1+1+1+1+1) = \underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)}_{\text{لان } \alpha \text{ تماثل}}$$

$$= \underbrace{5.\alpha(1) = 0}_{\text{الجمع بالمقاس 5}} \Rightarrow \alpha(5) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(5) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $0 = 5$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا يوجد تماثل

السؤال الثالث

١) $\mathbb{Z}_9 = \{m \in Z : 0 \leq m < 9\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

لمعرفة نظير كل عنصر يكفي أن نرى ما العنصر الذي يعطي ناتج الجمع معه الحيادي - وهو الصفر - أي أن :

$$0 + 0 = 0 \quad ,1 + 8 = 0\ ,2 + 7 = 0\ ,3 + 6 = 0, 4 + 5 = 0\ ,5 + 5 = 0$$

فيكون جدول النظير العناصر a:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$-a$	0	8	7	6	5	4	3	2	1

$$o(a) = o(a^{-1})$$

اي ان العنصر و نظيره له نفس المرتبة

وبما أن مرتبة العنصر تقسم مرتبة الزمرة يكفي أن نجرب $\{1,3,9\}$ كمراتب للعناصر :

$$1.0 = 0 \implies o(0) = 1$$

$$1.1 = 1\ , \quad 3.1 = 3\ , \quad 9.1 = 0\ , \quad o(1) = 9$$

$$1.2 = 2\ , \quad 3.2 = 6\ , \quad 9.2 = 0 \implies o(2) = 9$$

$$1.3 = 3\ , \quad 3.3 = 0\ , \quad \implies o(3) = 3$$

$$1.4 = 4\ , \quad 3.4 = 3\ , \quad 9.4 = 0 \implies o(4) = 9$$

فيكون جدول مرتبة العناصر $o(a)$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$o(a)$	1	9	9	3	9	9	3	9	9

٢) $< a > = \{n.a \ : n \in N^*\}$

وبالتالي $< 2 > = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

لأن

$$1.2 = 2\ , \quad 2.2 = 4\ , \quad 3.2 = 6\ , \quad 4.2 = 8\ , \quad 5.2 = 1\ , \quad 6.2 = 3,$$

وان $<3>=\{0,3,6\}$
لأن $1.3=3\,,\quad 2.3=6,\quad 3.3=0$

٣) $K=<3>=\{0,3,6\}$

حسب لاغرانج

$$(\mathbb{Z}_9:1)=(\mathbb{Z}_9:K)(K:1)$$
$$(\mathbb{Z}_9:K)=\frac{(\mathbb{Z}_9:1)}{(K:1)}=\frac{9}{3}=3$$

نعلم أن $a+K=K \Leftrightarrow a\,\epsilon\,K$ ومنه فإن :

$$K=0+K=\{0,3,6\}=3+K=6+K$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$1+K=\{1,4,7\}$$
$$2+K=\{2,5,8\}$$
$$4+K=\{4,7,1\}$$
$$5+K=\{5,8,2\}$$
$$7+K=\{7,1,4\}$$
$$8+K=\{8,2,5\}$$

وبذلك يكون لدينا

$$K\,,1+K,2+K$$

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $\mathbb{Z}_9$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_9$ فإن K ناظمية في $\mathbb{Z}_9$ وبالتالي $\frac{\mathbb{Z}_9}{K}$ معرفة وبالتالي زمرة الخارج تكون :

$$\frac{\mathbb{Z}_9}{K}=\{a+K\,:\,a\,\epsilon\,\mathbb{Z}_9\}=\{K\,,1+K,2+K\}$$

٤) إن الزمرة $\frac{\mathbb{Z}_9}{K}$ دوارة لان مرتبتها 3 (عدد اولي) وحسب مبرهنة كل زمرة مرتبتها عدد أولي تكون دوارة .
٥) جميع الزمر الدوارة والمنتهية والتي لها نفس المرتبة تكون متماثلة

وبما أن $\frac{\mathbb{Z}_9}{K}$ دوارة منتهية نختار الزمرة H المولدة بالعنصر 3 اي $H=<3>$ منتهية دوارة ولهما نفس المرتبة ومنه التماثل يكون محقق .

٦) إن $\mathbf{Z_9}\oplus\mathbf{Z_4}$ دوارة حسب المبرهنة:

((ليكن H, K زمر دوارة منتهية إن الشرط الازم والكافي لكي تكون الزمرة $H \oplus \mathrm{K}$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K عددين أوليين فيما بينهما))

نلاحظ ان $\mathbf{Z_9}, \mathbf{Z_4}$ زمرتين دوارتين منتهيتين ، مرتبة الزمرة $\mathbf{Z_4}$ تساوي 4 ومرتبة الزمرة $\mathbf{Z_9}$ تساوي (9) وأن $\gcd(9,4) = 1$ وبالتالي زمرة الجداء المباشر $\mathbf{Z_9} \oplus \mathbf{Z_4}$ زمرة دوارة .

ومرتبة العنصر هي

$$o(a,b) = icm(o(a), o(b))$$

$$icm(o\left(\underbrace{3}_{Z_9\ \text{بالنسبة ل}}\right), o\left(\underbrace{2}_{Z_4\ \text{بالنسبة ل}}\right) = icm(3,2) = 6$$

انتهى حل الدورة الفصلية الثالثة ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٧) :

السؤال الأول :

١) لتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على المجموعة P. أثبت أن العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على المجموعة P بالشكل الاتي $\forall a,b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$ هي علاقة تكافؤ على P . ثم أثبت أن صفوف تكافؤ هذه العلاقة تشكل تجزئة للمجموعة P .

٢) اذكر نص تمهيدية زورن .

٣) لتكن A مجموعة ما. $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية في A أثبت أن :

$$card\ A < card\ P(A)$$

٤) بفرض أن Z مجموعة الأعداد الصحيحة . أثبت انه أيا كان $\mathrm{a,b} \in \mathrm{Z}$ بحيث $\mathrm{b} \neq 0$ عندئذ يوجد $\mathrm{q,r} \in \mathrm{Z}$ بحيث $\mathrm{a = q.b + r}$ حيث $0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{b}$ فضلاً عن ذلك $\mathrm{q,r}$ يتعينان بشكل وحيد .

السؤال الثاني : لتكن $(G,.)$ زمرة. والمطلوب :

١) أثبت أنه اذا كانت زمرة الخارج $G/Z(G)$ دوارة عندئذ تكون الزمرة G تبديلية .

٢) أثبت ان مركز الزمرة G يشكل زمرة جزئية ناظمية في G .

٣) لتكن k,H زمرتين جزئيتين في G إذا كانت الزمرة الجزئية k ناظمية في G أثبت أنه :

$$\frac{H.k}{k} \cong \frac{H}{H \cap k}$$

٤) اذا كانت الزمرة G دوارة .فإن كل زمرة جزئية في G تكون دوارة .

٥) اذا كانت $(G:1) = 4$ أثبت أنه إما $Z_4 \cong G$ أو $Z_2 \oplus Z_2 \cong G$

٦) لنفرض أن $Z = G$ زمرة الاعداد الصحيحة . أثبت أنه لأجل اي عدد صحيح $m > 1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G . وهل من اجل $m = 5$ تكون 5 زمرة جزئية في G أو تماثل $5Z$. ؟

السؤال الثالث : لتكن $(U(16),.)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 16 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(16)$ ثم شكل جدولاً تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(16)$.

٢) أوجد الزمرتين الجزئيتين $U_4(16), U_2(16)$.

٣) أثبت ان المجموعة $K = \{1,3,9,11\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(16)$.

٤) بين فيما اذا كانت $K \cong Z_4$ أم لا ؟

٥) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(16)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(16)/K$.

٦) بفرض أن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $K \oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟. ثم أوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $K \oplus Z_3$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٧) :

السؤال الأول

١) بما أن $\leq$ انعكاسية فإن

$$\forall a,b \in P : a \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

وبالتالي العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية

$$\forall a,b \in P : a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a \Leftrightarrow b\mathcal{P}a$$

وبالتالي العلاقة $\mathcal{P}$ تناظرية

$$\forall a,b,c \in P$$
$$a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$
$$b\mathcal{P}c \Leftrightarrow b \leq c \wedge c \leq b$$

ولان العلاقة $\leq$ متعدية فإن

$$a \leq c \wedge c \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}c$$

وبالتالي العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية

لنثبت صفوف التكافؤ تشكل تجزئة

$$P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a} : a \in P\}$$

الشرط الأول : لنبرهن انها غير خالية

لدينا $P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a} : a \in P\}$

$$\forall \bar{a} \in P/_{\mathcal{P}} ; a \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \neq \emptyset$$

الشرط الثاني :

١) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ فإنه يتم المطلوب .

٢) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ أي تحويان على الأقل عنصر مشترك

$$\exists d \in \bar{a} \cap \bar{b} : d \in P$$

حسب مبرهنة اذا انتمى عنصر إلى صف تكافؤ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنحقق ذلك :

$$d \in \bar{a} \Rightarrow \bar{d} = \bar{a} \quad , \quad d \in \bar{b} \Rightarrow \bar{d} = \bar{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \bar{b}$$

الشرط الثالث :

$$P = \cup_{a \in P}\{a\} \subseteq \cup_{a \in P} \bar{a} = \cup_{\bar{a} \in P/_{\mathcal{P}}} \bar{a} \subseteq P$$

ومنه $P = \cup_{\bar{a} \in P/_{\mathcal{P}}} \bar{a}$

ومنه المجموعة $P/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P.

٢) لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى (ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

٣) نميز حالتين

1) $A=\emptyset$ في هذه الحالة $card\ A = 0 < 1 = card\ P(A)$ يتم المطلوب.

2) $A\neq\emptyset$ عندئذ نعرف التطبيق $f : A \to P(A)$

$$\forall a \in A ; f(a) = \{a\}$$

عندئذ هذا التطبيق دوما متباين .

وحسب التعريف $card\ A \leq card\ P(A) \quad .... \quad (1)$

بقي ان نتخلص من اشارة المساواة في العلاقة (1)

لنفرض جدلاً ان $card\ A = card\ P(A)$ وحسب التعريف يوجد تطبيق تقابل $g : A \to P(A)$

لنأخذ المجموعة $H = \{a : a \in A\ ,\ a \notin g(a)\}$

- H مجموعة جزئية في A ومنه $H \in P(A)$.

إن $H \neq \emptyset$ لانه لو كان $H = \emptyset$ عند ئذ ولكون g غامر فإنه يوجد $d \in A$ بحيث $d \in g(d) = \emptyset$

وهذا تناقض لان g غامر أي أن $H \neq \emptyset$.

- بما أن g غامر يوجد $t \in A$ بحيث $t \in g(t) = H$ نميز حالتين :

١) $t \notin g(t) = H$ حيث $t \in H$.

٢) $t \in g(t) = H$ حيث $t \notin H$.

وفي كلا الحالتين نحصل على تناقض .

وجود هذا التطبيق g يؤدي الى كل هذا التناقض الذي حصلنا عليه أي هذا التطبيق غير موجود بمعنى اخر $card\ A \neq card\ P(A)$

ومنه $card\ A < card\ P(A)$.

وهو المطلوب.

٤) <u>من أجل $b > 0$</u>

لنأخذ المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z\ ,\ a - k.b \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

- $0 \in S$ و هنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $0 = a - k.b$ أي أن $a = k.b$

و هنا $r = 0$ و $k = q$ ويتم المطلوب .

بقي ان نثبت ان q, r يتعينان بشكل وحيد .

إن الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

وفرضاً $r = 0 \Leftarrow$ نفرض انه يوجد $q, q_1 \Leftarrow a = q.b \wedge a = q_1.b$

ومنه $q.b = q_1.b \Leftarrow q = q_1$ متساويان لان $b > 0$

- $0 \notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

- $a > 0$ عندئذ نختار $k = 0$ فيكون : $a - b.k = a > 0$ ومنه $a - b.k > 0$ ومنه $a - b.k \in S$ ومنه S ليست خالية .
- $a < 0$ عندئذ نختار $k = 2a$ نجد أن :

$$a - (2a).b > 0$$

وبالتالي المجموعة $S \neq \emptyset \Leftarrow a + 2a.b \in S$.

- $a = 0$ نختار $k = -1$ فنجد : $a - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$ و هكذا نجد أن Sغير خالية.

مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ وكما أن $S \subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ حيث :

$$r = a - q.b \quad : \quad q \in Z$$

أي أن : $a = q.b + r$

الأن لنبرهن أن $r < b$:

لدينا العلاقة من أجل عددين إما : $\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases}$

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ:$r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1 + q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overbrace{r}^{\text{موجب}} - \overbrace{b}^{\text{موجب}} > 0$$

ومنه $a - (1 + q)b \in S$

$$a - (1 + q)b < a - q.b = r \Rightarrow a - (1 + q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S .

الحالة الثانية : نفرض أن $r=b$ عندئذ:

$$a-(1+q).b=\underbrace{a-qb}_{r}-b$$

وبالتالي $r-b=0$

ومنه $a-(1+q)b\in S$ وقيمته تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0\in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة
ويكون لدينا $r<b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0\in S$ كان $r=0$

في الحالة الثانية $r>0$ وبحالة $0\notin S$ كان $0<r<b$

وبكلتا الحالتين $0\le r<b$

بقي ان نبرهن الوحدانية بالنسبة للحالة الثانية

لنفرض أن : $a=q_1.b+r_1$ و $a=q.b+r$

حيث : $q,q_1,r,r_1\in Z$ وأن $0\le r,r_1<b$.

لنفرض جدلا أن $r\neq r_1$ عندئذ $q.b+r=q_1.b+r_1$

لنفرض أن $r_1<r$ حيث $r-r_1>0$

$$\Rightarrow (q_1-q)b=r-r_1\ge b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r=r_1$

وبالتالي $r=r_1 \Leftarrow (q_1-q)b=0$ ولدينا $b>0$ ومنه $(q_1-q)=0 \Leftarrow q_1=q$

<u>من أجل $b<0$</u>

عندئذ $|b|>0$ ومنه حسب الاعتماد على الحالة السابقة $q_0,r\in Z$ بحيث :

$a=q_0.|b|+r$ وأن $0\le r<|b|$

ومنه : $b<0 \Leftarrow a=-q_0.b+r$.

بفرض أن $\overbrace{q}^{\text{وحيد}}=\overbrace{-q_0}^{\text{وحيد}}$ نجد أن $a=q.b+r$ وأن $0\le r<|b|$ ومنه q,r وحيدين .

ويتم المطلوب.

السؤال الثاني

١) لنفرض أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة عندئذ هذه الزمرة تكون مولدة بعنصر من عناصرها

$$G/Z(G) =< g.Z(G) > \quad \forall\, g \in G$$

ومنه يوجد $n,m \in Z$ وليكن $x,y \in G$ بحيث:

$$x.Z(G) = (g.Z(G))^n = g^n .Z(G) \Longrightarrow \text{حسب الضرب في زمرة الخارج}$$

$$y.Z(G) = (g.Z(G))^m = g^m .Z(G) \Longrightarrow \text{حسب الضرب في زمرة الخارج}$$

وأن $x \in x.Z(G) = g^n .Z(G)$

$$x = g^n .a \ : \ a \in Z(G)$$

وأن $y \in y.Z(G) = g^m .Z(G)$

$$y = g^m .b \ : \ b \in Z(G)$$

$$x.y = g^n .\underbrace{(a.g^m)}_{\text{تبديلي}}.b = g^n .g^m.a.b = g^{n+m}.b.a = g^{m+n}.b.a = g^m .(\underbrace{g^n.b}_{\text{تبديلي}}).a = y.x$$

وهكذا نجد الزمرة G تبديلية .

٢) لنثبت أن الزمرة $Z(G) = \{a : a \in G ,\ x.a = a.x ,\ \forall\, x \in G\}$ هي جزئية ناظمية .

$\forall\, x \in G : e.x = x.e$ وأن $e \in G$ لأن $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$

وليكن $a,b \in Z(G)$ عندئذ :

$$\forall\, x \in G : a.x = x.a \quad ,b.x = x.b$$

$$b.x.b^{-1} = x \ \overset{\text{نضرب بمقلوب } b \text{ من اليمين}}{\Rightarrow} \qquad x.b^{-1} = b^{-1}.x \ \overset{\text{نضرب بالمقلوب من اليسار}}{\Rightarrow}$$

$$x(a.b^{-1}) = (xa)b^{-1} = (ax)b^{-1} = a(xb^{-1}) = a(b^{-1}.x) = (ab^{-1})x$$

$$a.b^{-1} \in Z(G)$$

وهذا يبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G. ولنثبت أن الزمرة الجزئية هي ناظمية

ليكن $a \in G$ ولنبرهن على أن $a\,Z(G)a^{-1} \subseteq Z(G)$

ليكن $x \in a\,Z(G)a^{-1}$ عندئذ

$$x = a.\text{k}.a^{-1} \quad : \quad k \in Z(G)$$

$$x = a.k.a^{-1} = \overbrace{\text{k}.a.a^{-1}}^{\text{فإنه حسب تعريف} Z(G)} = k\epsilon\ Z(G)$$

ومنه $Z(G)$ ناظمية في G .

٣) لنعرف العلاقة : $f : H \to \frac{H.K}{k}$ بالشكل :

$$\forall\, h \,\epsilon\, H \quad ; \quad f(h) = h.k$$

وحسب تعريفنا للجداء فإن $H \subseteq H.K$ فنجد أن f تطبيق لأنه إذا كان :

$$h_1, h_2 \,\epsilon\, H \quad : h_1 = h_2 \implies h_1.k = h_2.k$$

$$\implies f(h_1) = f(h_2)$$

وأيضا f تشاكل :

$$f(h_1.h_2) = (h_1.h_2).k$$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج

$$= (h_1.k).(h_2.k) = f(h_1).f(h_2)$$

وهذا غامر لأن إذا كان $\bar{z} \,\epsilon\, \frac{H.K}{k}$ حيث $\bar{z}$ مرافقة للزمرة k في $H.K$ عندئذ يوجد $g \,\epsilon\, H.K$ بحيث $\bar{z} = g.k$

وبما أن $g \,\epsilon H.K$ فإنه حسب تعريف الجداء :

$$h \,\epsilon\, H \ , \ x \,\epsilon\, k \quad ; \ g = h.x$$

ومنه $\bar{z} = g.k = (h.x).k$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج :

$$\bar{z} = (h.k)(x.k)$$

$$\bar{z} = (h.k).k = h.k$$

$$f(x) = x.k = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{H}{\ker f} \cong \frac{H.k}{k}$

$$\ker f = H \cap k$$

ليكن $a \,\epsilon \ker f$ عندئذ :

$$f(a) = \underbrace{k}_{\text{محايد المستقر}}$$

وحسب التعريف فإن : $f(a) = a.k$

وهنا نجد أن $a.k = k$ وبالتالي $a \epsilon k$

وكون $\ker f$ في المنطلق فإن $a \epsilon H$ فنجد أن $a \epsilon H \cap k$ وبالتالي

$$\ker f \subseteq H \cap k$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $b \epsilon H \cap k$ وطالما $b \epsilon H$ فنأخذ الصورة المباشرة $b \epsilon k$ حيث :

$$f(b) = b.k = k$$

عنصر في المنطلق مرتبط بالمحايد في المستقر ومنه :

$b \epsilon \ker f$ أي أن $H \cap k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد : $H \cap k = \ker f$ و عليه يكون :

$$\frac{\mathrm{H}}{H \cap K} = \frac{H}{Ker(f)} \cong \frac{k.H}{H}$$

٤) لتكن H زمرة جزئية في G نميز حالتين :

- إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H =< e >$ وبالتالي H زمرة دوارة .
- لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $y \epsilon H$ وإن $y \neq e$ ولما كان $y \epsilon G$ فإنه يوجد $t \epsilon Z$ بحيث $y = a^t$

نأخذ المجموعة $l = \{s \ ,s \epsilon N^* : \ a^s \epsilon H \}$

لأن $\emptyset \ \neq l \subseteq N^*$ $a^t \epsilon H$ وبالتالي $t \epsilon l$ ومنه l تحوي عنصر أصغر وليكن k ومنه $< a^k > \subseteq H$ أي أن $a^k \epsilon H$.

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \epsilon H$ ومنه $x = a^m$ حيث $m \epsilon Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل عددين k, m يوجد $q, r \epsilon Z$ بحيث $0 \leq r < k$ وأن $m = qk + r$

لنفرض جدلاً أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < k$

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk}.a^r = (a^k)^q.a^r$$

نضرب بمقلوب a^{qk} نجد $a^r = a^{-qk}.a^m \epsilon \mathrm{H}$ وبالتالي فإن $r \in l$ و $r < k$ يوجد عنصر اصغر من k وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ لأن k عنصر اصغر ومنه $r = 0$ ومنه $m = qk$ وبالتالي :

$$x = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \epsilon < a^k >$$

وهكذا نجد ان $H \sqsubseteq < a^k >$ وبالتالي فإن $H =< a^k >$ أي أن H دوارة

٥) لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1) = 4$ أن G تبديلية لأن $(G:1) = 2^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G \cong Z_4$
- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن K إن K دوارة وبالتالي $K =< a >: a \in K$ ومنه $K \subsetneq G$ اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$

ولنضع $H = < b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 2 أي أن $(H:1) = 2$ حيث أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G

ومنه $H = \{e,b\}$ $\quad$ $\mathrm{K} = \{e,a\}$

إن كل H,K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \epsilon K \ \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^2 = e \ ; y \epsilon K$$
$$y^2 = e \ ; y \epsilon H$$

ومنه $y = y^{-1}$ ومنه فإن $o(y) = 2$: وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} \qquad \text{قانون حفظ}}$$

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 4$$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4

واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

٦) لنثبت أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $(\mathbb{Z},+)$ أي لنثبت أن :

$$m\mathbb{Z} = \{m.n \quad : \quad n\epsilon\mathbb{Z}\}$$

إن $\emptyset \neq m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ لأن $0 \ \epsilon \ m\mathbb{Z}$ على الأقل .

ليكن $x, y \in m\mathbb{Z}$ عندئذ يوجد $\varphi, \beta \in m\mathbb{Z}$ بحيث :

$$x = m.a \qquad ,y = mb$$

$$\Longrightarrow x - y = m.a - m.b = m(a-b)$$

$$\Longrightarrow (a-b) \in \mathbb{Z} \ \Longrightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

وبالتالي $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$

نلاحظ أن $(\mathbb{Z}_5, +)$ ليست زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن العملية المعرفة عليها ليست ذات العملية المعرفة على $\mathbb{Z}$.

كما أن 5 لا تماثل $5\mathbb{Z}$ وذلك بملاحظة ما يلي :

$$\alpha : 5\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

لنفرض جدلاً أن $5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$

$$\alpha(5) = \alpha(1+1+1+1+1) = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1)}_{\text{لان } \alpha \text{ تماثل}}$$

$$= \underbrace{5.\alpha(1) = 0}_{\text{الجمع بالمقاس } 5} \Longrightarrow \alpha(5) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(5) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $5 = 0$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا يوجد تماثل

السؤال الثالث

---

١) $U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ ,1 \leq x < n \ , \ \ \gcd(x,n) = 1\}$

$$U(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي

$$1.1 = 1 \ , \quad 3.11 = 1 \ , \quad 5.13 = 1$$

$$7.7 = 1 \ , \qquad 9.9 = 1 \quad , \qquad 15.15 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	3	5	7	9	11	13	15
a^{-1}	1	11	13	7	9	3	5	15

للحصول على مرتبة كل عنصر نأخذ العنصر ونرفعه للاس وعندما يظهر المحايد يكون الاس هو المرتبة

(أكبر عدد صحيح لذلك لا نأخذ الصفر)

بما ان مرتبة العنصر تقسم مرتبة الزمرة يكفي أن نجرب $\{1,2,4,8\}$ كمراتب للعناصر أي

وعلماً أن $o(a^{-1}) = o(a)$.

$$1^1 = 1$$

$$3^1 = 3 \quad ,3^2 = 9 \quad ,3^4 = 1$$

$$5^1 = 5 \quad ,5^2 = 9 \quad ,5^4 = 1$$

$$7^1 = 7 \ ,7^2 = 1$$

$$9^1 = 9 \ ,9^2 = 1$$

$$15^1 = 15 \quad ,15^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	3	5	7	9	11	13	15
$o(a)$	1	4	4	2	2	4	4	2

٢) $U_k(n) = \{x \ : x \in U(n) : \mathrm{x \ mod - k} = 1 \ \}$

$$U_2(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$U_4(16) = \{1,5,9,13\}$$

٣) حتى تكون K زمرة جزئية في $(U(16),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall \ x, y \in \mathrm{K} \ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	3	9	11
1	1	3	9	11
3	3	9	11	1
9	9	11	1	3
11	11	1	3	9

نلاحظ من الجدول السابق أنها مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 16 وبالتالي تكون المجموعة K زمرة جزئية في $(U(16),.)$.

الزمرة K دوارة لأن :

$$3^0 = 1 \ \ , \ \ 3^1 = 3 \,, 3^2 = 9, \ \ 3^3 = 11$$

أي أن K مولدة بـ 3 أي $K =< 3 >$

٤) $K \cong Z_4$ متماثلان لان كلاً من K, Z_4 هي زمر دوارة ومرتبتها 4 وحسب مبرهنة سابقة كل الزمر الدوارة والتي لها نفس المرتبة تكون دوارة .

٥) المرافقات وهي على النحو التالي :

$$\forall a \in U(15) \quad : \quad a.K$$

ونعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$1.K = 3.K = 11.K = \{1,3,9,11\} = K$$

وانه وحسب لاغرانج فإن

$$(U(16):1) = (U(16):K)(K:1)$$

$$8 = (U(16):K)\,.4$$

وبالتالي $(U(16):K) = 2$

حصلنا على مرافقة وهي K وبالتالي فإن باقي المرافقات متساوية

$$5.K = \{5,15,13,7\} = 7K = 15K = 13K$$

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(16)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(16)$ فإن K ناظمية في $U(16)$ وبالتالي $\frac{U(16)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(16)}{K} = \{a.K \ : a \in U(16)\} = \{K, 5.K\}$$

٦) $Z_3 = \{0,1,2\} \quad , K = \{1,3,9,11\}$

إن $K \oplus Z_3$ دوارة حسب المبرهنة:

((ليكن H, K زمرة دوارة منتهية إن الشرط الازم والكافي لكي تكون الزمرة $K \oplus H$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K عددين أوليين فيما بينهما))

نلاحظ ان Z_3, K زمرتين دوارتين منتهيتين ، مرتبة الزمرة K تساوي 4 ومرتبة الزمرة Z_3 تساوي (3) وأن $\gcd(3,4) = 1$ وبالتالي زمرة الجداء المباشر $K \oplus Z_3$ زمرة دوارة .

ومرتبة العنصر هي

$$o(a,b) = icm(o(a), o(b)$$

$$icm(o(3), o\left(\underbrace{2}_{\text{بالنسبة ل } Z_3}\right) = icm(4,3) = 12$$

انتهى حل الدورة الفصلية الثانية☺

أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٧) :

السؤال الأول :

١) أثبت أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من مجموعة الأعداد الطبيعية تحوي عنصر أصغري .

٢) لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة و $a,b \epsilon P$ والمطلوب:

أ) أثبت أن $a \epsilon \bar{b}$ عندما وفقط عندما $\bar{a} = \bar{b}$.

ب) أثبت أن المجموعة صفوف التكافؤ العلاقة $\frac{P}{\mathcal{P}} = \{\bar{a} \;\; : a \in P\}$ تشكل تجزئة للمجموعة P .

٣) لتكن A مجموعة ما. $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية في A عندئذ :

$$card\ A < card\ P(A) \;\; .... \quad (*)$$

٤) ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً .أثبت أن العلاقة $\mathcal{P}$ العرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالشكل الاتي :أيا كان $a, b \in Z$ فإن $a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a - b \in nZ$ هي علاقة تكافؤ ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $4 \in Z$.

السؤال الثاني :
لتكن $(G,.)$ زمرة .والمطلوب :

١) إذا كان لأجل $a, b \in G$ تحقق أن $(a.b)^2 = a^2.b^2$ أثبت أن الزمرة G تكون تبديلية .

٢) أذكر نص مبرهنة لاغرانج ثم أثبت على صحته.

٣) لنفرض أن الزمرة G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها $m.P^n$ حيث P أولي و $n, m \epsilon \mathbb{Z}^*$ و m لا تقبل القسمة على P.أثبت أن كلاً من المجموعتين تشكلان زمر جزئية في G وان $G = H \times K$.

$$K = \{x : x \epsilon G \;\; : x^m = e\}, \qquad H = \{x : x \epsilon G \;\; : x^{P^n} = e\}$$

٤) اذا كانت $(G:1) = 4$ أثبت أنه إما $Z_4 \cong G$ أو $Z_2 \oplus Z_2 \cong G$

٥) لنفرض أن الزمرة G دوارة .أثبت أن كل زمرة جزئية في G تكون أيضا دوارة .

٦) لنفرض أن $G = Z$ زمرة الاعداد الصحيحة . أثبت أنه لأجل اي عدد صحيح $m > 1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G . وهل من اجل $m = 3$ تكون Z_3 زمرة جزئية في G أو تماثل $3Z$. ؟

السؤال الثالث :

لتكن $(U(16),.)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 16 المطلوب :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $U(16)$ ثم شكل جدولاً تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(16)$.

٢) أوجد الزمرتين الجزئيتين $U_4(16), U_2(16)$.

٣) أثبت ان المجموعة $K = \{1,3,9,11\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(16)$.

٤) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(16)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(16)/K$.

٥) بفرض أن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3. هل الزمرة $K \oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟. ثم أوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $K \oplus Z_3$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٧) :

السؤال الأول

١) لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية في N نميز الحالات التالية :

١) $S = N$ عندئذ S تحوي عنصر أصغر او إذا كان $0 \epsilon S$ عندئذ S تحوي عنصر أصغر .

٢) $0 \notin S$ و $S \neq N$

لنأخذ المجموعة: $L = \{a : a \epsilon N ; a \leq x \quad \forall x \epsilon S \} \quad (*)$

$L \neq \Phi$ لان $0 \epsilon L$ كما ان $L \neq N$

لأنه اذا فرضنا جدلا أنه $L = N$ عندئذ يوجد $a \epsilon S$ عندئذ $a + 1 \epsilon L = N$ و ان $a + 1 < a$ وهذا تناقض ومنه $L \neq N$

وبالتالي يوجد عنصر $b \epsilon L$ بحيث $b + 1 \notin L$ لآنه اذا كان لأجل $b \epsilon N$ اذا كان $b \epsilon L$ فإن $b + 1 \epsilon L$ نجد ان $L = N$وهذا غير ممكن .

ولما كان $b \epsilon l$ فإن $\forall x \epsilon s \; ; \; b \leq x$ ولنبرهن أن $b \epsilon S$

لنفرض جدلاً ان $b \notin S$عندئذ

$$\forall x \epsilon S \; ; \; b < x$$

اي ان $x - b \epsilon N$

$$x - b > 0$$

نفرض أن $x - b = m$

عندئذ $x = m + b$

نضيف ونطرح مقدار (١) نجد : $x = (m - 1) + (b + 1)$

وبالتالي فإن $\forall x \epsilon s \; ; \; b + 1 \leq x$

وحسب الفرض فإن $b + 1 \epsilon L$ وهذا يناقض كون $b + 1 \notin L$

ومنه فإن $b \epsilon S$ ويحقق

$$\forall x \epsilon S \; ; \; b \leq x$$

وهذا يبين ان العنصر x هو عنصر أصغر في s وكل عنصر أصغر هو عنصر أصغري وهو المطلوب.

٢) أ) "⇐" بفرض أن $a\,\epsilon\,\bar{b}$ ومنه حسب التعريف $a\mathcal{P}b$ وذلك حسب تعريف صف التكافؤ .

ليكن $x\,\epsilon\,\bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}x$ (حسب تعريف صف التكافؤ) إن $\mathcal{P}$ تناظرية لأنها علاقة تكافؤ ينتج أن $b\mathcal{P}a$

و $\mathcal{P}$ علاقة متعدية يصبح كما يلي

$$\begin{cases} b\mathcal{P}a \\ a\mathcal{P}x \end{cases} \Longrightarrow\ b\mathcal{P}x\ \Leftrightarrow x\mathcal{P}b$$

ومنه $x\,\epsilon\,\bar{b}$ وبالتالي $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

ليكن $y\,\epsilon\,\bar{b}$ عندئذ $b\mathcal{P}y$ (حسب تعريف صف التكافؤ

أصبح لدينا $\begin{cases} a\mathcal{P}b \\ b\mathcal{P}y \end{cases} \Longleftarrow a\mathcal{P}y$ لأن $\mathcal{P}$ علاقة متعدية وبالتالي يكون $y\,\epsilon\,\bar{a}$ ومنه $\bar{b}\ \subseteq\ \bar{a}$

من الاحتوائيين $\left(\bar{a} \subseteq \bar{b}\ ,\bar{b}\ \subseteq\ \bar{a}\right)$ نجد $\bar{a} = \bar{b}$.

" $\Longrightarrow$ " نفرض أن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنبرهن أن $a\,\epsilon\,\bar{b}$ بما أن $\bar{a} = \bar{b}$

و لدينا $a\,\epsilon\,\bar{a}$, $a\,\epsilon\,\bar{a} = \bar{b}$

وهو المطلوب.

ب) لكي تكون تجزئة يجب أن تحقق الشروط الثلاثة ولدينا $P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a}: a\,\epsilon\,P\}$ يشكل تجزئة للمجموعة P .

الشرط الأول : لنبرهن انها غير خالية

لدينا $P/_{\mathcal{P}} = \{\bar{a}: a\,\epsilon\,P\}$

$$\forall \bar{a}\,\epsilon\ P/_{\mathcal{P}}\ ; a\,\epsilon\,\bar{a}\ \Rightarrow\ \bar{a}\ \neq \emptyset$$

الشرط الثاني :

١) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ فإنه يتم المطلوب .

٢) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ أي تحويان على الأقل عنصر مشترك

$$\exists\, d\,\epsilon\,\bar{a} \cap \bar{b} : d\,\epsilon\,P$$

حسب التمهيدية السابقة اذا كان عنصر انتمى إلى صف تكافؤ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنحقق ذلك :

$$d\,\epsilon\,\bar{a}\ \ \Rightarrow \bar{d} = \bar{a}\ \ ,\ d\,\epsilon\,\bar{b}\ \ \Rightarrow \bar{d} = \bar{b}\ \ \ \Rightarrow\ \ \bar{a} = \bar{b}$$

الشرط الثالث :

$$P\ = \cup_{a\,\epsilon\,P}\{a\}\ \subseteq \cup_{a\,\epsilon\,P}\,\bar{a}\ \ = \cup_{\bar{a}\,\epsilon\,P/_{\mathcal{P}}}\,\bar{a}\ \subseteq P$$

ومنه $P = \cup_{\bar{a}\epsilon\,P/_{\mathcal{P}}}\,\bar{a}$

ومنه المجموعة $P/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P.

٣) نميز حالتين

1) $A = \emptyset$ في هذه الحالة $card\ A = 0 < 1 = card\ P(A)$ يتم المطلوب.

2) $A \neq \emptyset$ عندئذ نعرف التطبيق $f : A \to P(A)$

$$\forall\, a \in A\, ; f(a) = \{a\}$$

عندئذ هذا التطبيق دوما متباين .

وحسب التعريف $card\ A \leq card\ P(A) \quad .... \quad (1)$

بقي ان نتخلص من اشارة المساواة في العلاقة (1)

لنفرض جدلاً ان $card\ A = card\ P(A)$ وحسب التعريف يوجد تطبيق تقابل $g : A \to P(A)$

لنأخذ المجموعة $H = \{a : a \in A\ ,\ a \notin g(a)\}$

- H مجموعة جزئية في A ومنه $H \in P(A)$.

إن $H \neq \emptyset$ لانه لو كان $H = \emptyset$ عند ذ ولكون g غامر فإنه يوجد $d \in A$ بحيث $d \in g(d) = \emptyset$

وهذا تناقض لان g غامر أي أن $H \neq \emptyset$.

- بما أن g غامر يوجد $t \in A$ بحيث $t \in g(t) = H$ نميز حالتين :

٤) $g(t) = H$ حيث $t \notin$ $t \in H$.

٥) $g(t) = H$ حيث $t \in$ $t \notin H$.

وفي كلا الحالتين نحصل على تناقض .

وجود هذا التطبيق g يؤدي الى كل هذا التناقض الذي حصلنا عليه أي هذا التطبيق غير موجود بمعنى اخر $card\ A \neq card\ P(A)$

ومنه $card\ A < card\ P(A)$.

وهو المطلوب.

٤)

- إن العلاقة ρ انعكاسية : أياً كان $a \in Z$ فإن : $a - a = 0 = 0.4 \in 4Z$ و هذا يعني أن $a\rho a$ و بالتالي هي انعكاسية

- إن العلاقة ρ تناظرية : ليكن $a, b \in Z$ بحيث $a\rho b$ عندئذٍ $a - b \in 4Z$ إذاً يوجد $m \in Z$ بحيث

$a - b = 4m$ و عليه يكون $b - a = 4(-m) \in 4Z$ كون $-m \in Z$ و هذا يبين أن $b\rho a$

- أخيراً إن العلاقة ρ متعدية :ليكن $a, b, c \in Z$ بحيث $a\rho b\ \&\ b\rho c$ و هذا يعني أن:

$$a - b \in 4Z \implies \exists\, x \in Z : a - b = 4x$$

$$b - c \in 4Z \implies \exists\, y \in Z : b - c = 4y$$

الآن لدينا :

$$a - c = a - b + b - c = 4x + 4y = 4(x + y) \in 4Z$$

و هذا يبين أن $a\rho c$ فهي متعدية مما سبق نجد أن ρ علاقة تكافؤ

لنوجد صف تكافؤ العنصر a ، بالتعريف :

$$\bar{a} = \{x : x \in Z \quad : \quad a\rho x\} = \{x : x \in Z : a - x = 4y : y \in Z\}$$

ليكن $x \in \bar{a}$ عندئذٍ يوجد $y \in Z$ بحيث $a - x = 4y$ و منه $x = a - 4y$ بالتالي :

$$\bar{a} = \{a - 4y : y \in Z\}$$

السؤال الثاني

١) $(a.b)^2 = a^2.b^2 \Longrightarrow (a.b).(a.b) = a^2.b^2 \Longrightarrow a.(b.a.b) = a^2b^2$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار:

$$aba = a^2b$$

نضرب بـ a^{-1} من اليمين:

$$ba = ab$$

و هو المطلوب .

٢) مبرهنة لاغرانج : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الاثبات : لنفرض ان $(G:1) = n$ ولنفرض ان $a_1H, a_2H, \dots\dots\dots a_mH \quad : \quad m \leq n$

جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G ولما كانت المجموعة $M_l = \{a_iH : 1 \leq i \leq m\}$

تشكل تجزئة للزمرة G نجد ان $G = \cup_{i=1}^{m} a_iH$

$$(G:1) = \sum_{i=1}^{m} card\ a_iH$$

$$= card\ a_1H + card a_2H, \dots\dots\dots + card\ a_mH$$

$$= card\ H + card\ H + \ \dots\dots\dots + card\ H$$

$$= m\ card\ H$$

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

٣) واضح $G \supseteq K \neq \emptyset$ لأن $e \in K$ ، ليكن $x, y \in K$ عندئذ وحسب تعريف الـ K فإن :

$$x^m = e$$

$$y^m = e \quad , \quad y^{-m} = e$$

$$(x.y^{-1})^m = \underbrace{x^m . y^{-m}}_{\text{كون } G \text{ تبديلية فإنه ننزل القوة على المضاريب}} = e$$

واضح $G \supseteq H \neq \emptyset$ لأن $e \in H$ ، ليكن $x, y \in H$ عندئذ وحسب تعريف الـ H فإن :

$$x^{P^n} = e$$

$$y^{P^n} = e \quad , \quad y^{-P^n} = e$$

$$(x.y^{-1})^{P^n} = \underbrace{x^{P^n} . y^{-P^n}}_{\text{كون } G \text{ تبديلية فإنه ننزل القوة على المضاريب}} = e$$

ووجدنا سابقا أنه كي تتحقق $G = H \times K$ يجب أن يتحقق

$G = H.K$ و $K \cap H = < e >$

لما كانت الزمرة G تبديلية فإن كلا من K, H زمر جزئية ناظمية في G ومنه فإن $G \supseteq K.H$ زمرة جزئية في G

لنثبت الاحتواء المعاكس

لدينا حسب الفرض $gcd(m, P) = 1$ لأنه طالما العدد الأولي ليس قاسم لـ m فإن القاسم المشترك الأعظم لهما هو 1

ومنه $gcd(m, P^n) = 1$ لأنه إذا $gcd(m, P^n) = d > 1$ فإن d يقسم P^n ومنه $d = P^t$ حيث $n > t$

وأيضاً d يقسم m ومنه $s \in Z$: $m = s.d$ و هذا يبين أن m يقبل القسمة على P و هذا مرفوض ومنه

$$gcd(m, P^n) = 1$$

ومنه يوجد $q, r \in Z$ فإن $1 = qm + rP^n$

ليكن $g \in G$ عندئذ :

$$g = g^1 = g^{qm + rP^n} = g^{qm} . g^{rP^n}$$

$$\Longrightarrow (g^{qm})^{P^n} = \left(g^{mP^n}\right)^q = e^q = e$$

ومنه $(g^{qm}) \in H$ وأيضا $\left(g^{rP^n}\right) \in G$ وأن

$$\left(g^{rP^n}\right)^m = \left(g^{mP^n}\right)^r = e^r = e$$

ومنه $g^{rP^n} \in K$

ومنه $g^{qm} . g^{rP^n} \in H.K$

ومنه نجد أن

$$G \subseteq K.H$$

وبالتالي $G = K.H$ لنثبت أن $H \cap K =< e >$

ليكن $y \in k \cap H$ وأن $o(y) = \lambda$ عندئذ :

$$y \in k \implies y^m = e$$

$$y \in H \implies y^{P^n} = e$$

ومنه نجد أن λ يقسم كل من m , P^n وطالما $gcd(m, P^n) = 1$ نجد أن $\lambda = 1$

أي أن $y^\lambda = y^1 = e$ ومنه $K \cap H =< e >$ وبالتالي نجد مما سبق أن

$$G = K \times H$$

٤) لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1) = 4$ أن G تبديلية لأن $(G:1) = 2^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G \cong Z_4$
- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن K اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ ومنه $K \subsetneq G$ $K =< a > : a \in K$ دوارة وبالتالي إنK

ولنضع $H = < b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 2 أي أن $(H:1) = 2$ حيث أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G

ومنه $H = \{e, b\}$ $\quad$ $K = \{e, a\}$

إن كل H, K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \in K \ \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^2 = e \ ; y \in K$$
$$y^2 = e \ ; y \in H$$

ومنه $y = y^{-1}$ ومنه فإن $o(y) = 2$: وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$\boxed{\text{قانون حفظ} \qquad (H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)}}$$

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 4$$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4

واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

٥) لتكن H زمرة جزئية في G نميز حالتين :

- إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H =< e >$ وبالتالي H زمرة دوارة .
- لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $y \in H$ وإن $y \neq e$ ولما كان $y \in G$ فإنه يوجد $t \in Z$ بحيث $y = a^t$

نأخذ المجموعة $l = \{s \ , s \in N^* : \ a^s \in H\}$

لأن $\emptyset \ \neq l \subseteq N^*$ $a^t \in H$ وبالتالي $t \in l$ ومنه l تحوي عنصر أصغر وليكن k ومنه $< a^k > \subseteq H$ أي أن $a^k \in H$.

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in H$ ومنه $x = a^m$ حيث $m \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل عددين k,m يوجد $q,r \in Z$ بحيث $m = qk + r$ وأن $0 \leq r < k$

لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < k$

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk}.a^r = (a^k)^q.a^r$$

نضرب بمقلوب a^{qk} نجد $a^r = a^{-qk}.a^m \in \mathrm{H}$ وبالتالي فإن $r \in l$ و $r < k$ يوجد عنصر اصغر من k وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ لأن k عنصر اصغر ومنه $r = 0$ ومنه $m = qk$ وبالتالي :

$$x = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \in < a^k >$$

وهكذا نجد ان $H \sqsubseteq < a^k >$ وبالتالي فإن $H =< a^k >$ أي أن H دوارة

٦) لنثبت أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $(\mathbb{Z},+)$ أي لنثبت أن :

$$m\mathbb{Z} = \{m.n \quad : \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

إن $\emptyset \neq m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ لأن $0 \in m\mathbb{Z}$ على الأقل .

ليكن $x, y \in m\mathbb{Z}$ عندئذ يوجد $\varphi, \beta \in \mathrm{m}\mathbb{Z}$ بحيث :

$$x = m.a \qquad , y = mb$$

$$\Longrightarrow x - y = m.a - m.b = m(a - b)$$

$$\Longrightarrow (a - b) \in \mathbb{Z} \ \Longrightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

وبالتالي $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$

نلاحظ أن $(\mathbb{Z}_3, +)$ ليست زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن العملية المعرفة عليها ليست ذات العملية المعرفة على $\mathbb{Z}$.

كما أن $\mathbb{Z}_3$ لا تماثل $3\mathbb{Z}$ وذلك بملاحظة ما يلي :

$$\alpha : 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$$

لنفرض جدلاً أن $3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$

$$\alpha(3) = \alpha(1+1+1) = \underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)}_{\text{لان } \alpha \text{ تماثل}}$$

$$= \underbrace{3.\alpha(1) = 0}_{\text{الجمع بالمقاس } 3} \Rightarrow \alpha(3) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(3) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $0 = 3$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا يوجد تماثل

السؤال الثالث

١) $U(n) = \{x : x \,\epsilon\, \mathbb{N} \ ,1 \le x < n \ , \ \ \gcd(x,n) = 1\}$
$U(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

للحصول على مقلوب كل عنصر نأخذ العنصر الذي يكون ناتج تنفيذ العملية معه يعطي الحيادي

وعلماً أن $(a^{-1})^{-1} = a$.

$$1.1 = 1 \ , \quad 3.11 = 1 \ , \quad 5.13 = 1$$

$$7.7 = 1 \ , \quad 9.9 = 1 \ , \quad 15.15 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	3	5	7	9	11	13	15
a^{-1}	1	11	13	7	9	3	5	15

للحصول على مرتبة كل عنصر نأخذ العنصر ونرفعه للاس وعندما يظهر المحايد يكون الاس هو المرتبة

(أكبر عدد صحيح لذلك لا نأخذ الصفر)

بما ان مرتبة العنصر تقسم مرتبة الزمرة يكفي أن نجرب $\{1,2,4,8\}$ كمراتب للعناصر أي

وعلماً أن $o(a^{-1}) = o(a)$.

$$1^1 = 1$$

$$3^1 = 3 \quad ,3^2 = 9 \quad ,3^4 = 1$$

$$5^1 = 5 \quad ,5^2 = 9 \quad ,5^4 = 1$$

$$7^1 = 7 \quad ,7^2 = 1$$

$$9^1 = 9 \quad ,9^2 = 1$$

$$15^1 = 15 \quad ,15^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	3	5	7	9	11	13	15
$o(a)$	1	4	4	2	2	4	4	2

٢) $U_k(n) = \{x \ : x \in U(n) : \text{x mod} - \text{k} = 1 \ \}$

$U_2(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

$U_4(16) = \{1,5,9,13\}$

٣) حتى تكون K زمرة جزئية في $(U(16),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$\forall \ x,y \in \text{K} \ ; x.y \in K$

$\odot$	1	3	9	11
1	1	3	9	11
3	3	9	11	1
9	9	11	1	3
11	11	1	3	9

نلاحظ من الجدول السابق أنها مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 16 وبالتالي تكون المجموعة K زمرة جزئية في $(U(16),.)$.

الزمرة K دوارة لأن :

$$3^0 = 1 \quad , \quad 3^1 = 3 \, , 3^2 = 9, \quad 3^3 = 11$$

أي أن K مولدة بـ 3 أي $\text{K} =< 3 >$

٤) المرافقات وهي على النحو التالي :

$$\forall a \in U(15) \quad : \quad a.K$$

ونعلم أن $a \in K \Leftrightarrow a.K = K$ ومنه فإن :

$$1.K = 3.K = 11.K = \{1,3,9,11\} = K$$

وانه وحسب لاغرانج فإن

$$(U(16):1) = (U(16):K)(K:1)$$

$$8 = (U(16):K) . 4$$

وبالتالي $(U(16):K) = 2$

حصلنا على مرافقة وهي K وبالتالي فإن باقي المرافقات متساوية

$$5.K = \{5,15,13,7\} = 7K = 15K = 13K$$

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(16)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(16)$ فإن K ناظمية في $U(16)$ وبالتالي $\frac{U(16)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(16)}{K} = \{a.K \ : a \in U(16)\} = \{K, 5.K\}$$

٥) $Z_3 = \{0,1,2\} \quad , K = \{1,3,9,11\}$

إن $K \oplus Z_3$ دوارة حسب المبرهنة:

)) ليكن H, K زمرة دوارة منتهية إن الشرط الازم والكافي لكي تكون الزمرة $K \oplus H$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K عددين أوليين فيما بينهما ((

نلاحظ ان Z_3, K زمرتين دوارتين منتهيتين ، مرتبة الزمرة K تساوي 4 ومرتبة الزمرة Z_3 تساوي (3) وأن $\gcd(3,4) = 1$ وبالتالي زمرة الجداء المباشر $K \oplus Z_3$ زمرة دوارة .

ومرتبة العنصر هي

$$o(a,b) = icm(o(a), o(b))$$

$$icm\left(o(3), o\Big(\underbrace{2}_{\text{بالنسبة ل } Z_3}\Big)\right) = icm(4,3) = 12$$

انتهى حل الدورة الفصلية الأولى ☺

أسئلة الدورة الفصلية التكميلية (٢٠١٦) :

السؤال الأول :

١) لتكن Σ تجزئة للمجموعة P فإن العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة بالشكل الاتي :

$$\forall a, b \in P : \ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow \ \exists\, A \in \Sigma \,; \ a, b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وإن صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ هي وفقط هي عناصر التجزئة Σ أي أن :

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

٢) أذكر نص تمهيدية زورن

٣) ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q, r \in Z$ بحيث $a = q.b + r$ حيث $0 \le r < b$ فضلاً عن ذلك q, r يتعينان بشكل وحيد .

٤) لتكن $(\le)$ علاقة ترتيب جزئية معرفة على المجموعة A . عرف كلاً من العنصر الأصغر والأصغري ثم أثبت أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري , فضلاً عن ذلك أورد مثالاً على أن العكس غير صحيح.

السؤال الثاني : لتكن G زمرة . والمطلوب :

١) أثبت أن المجموعة $Z(G) = \{a : a \in G \,, \ x.a = a.x \ , \ \forall\, x \in G\}$ تشكل زمرة جزئية في G .

٢) أثبت أن كل زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G هي نواة لتشاكل زمري غامر .

٣) لنفرض أن الزمرة G تبديلية منتهية وليكن P عدداً اوليا يقسم مرتبة الزمرة G. أثبت أن الزمرة G تحوى عنصراً مرتبته P .

٤) لتكن A, B زمر جزئية في G إذا كانت الزمرة الجزئية B ناظمية في G أثبت أن الجداء $A.B$ يشكل زمرة جزئية في G.

٥) اذا كانت الزمرة $\boldsymbol{G}$ منتهية ومرتبتها عدد اولي , أثبت أن الزمرة $\boldsymbol{G}$ في هذه الحالة تكون دوارة .

السؤال الثالث: لتكن $U(15)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 المطلوب :

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $U(15)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(15)$.

٢) اوجد الزمرتين الجزئيتين $U_5(15)$ و $U_3(15)$ ثم بين اي منهما دوارة

٣) أثبت ان المجموعة $\mathrm{K} = \{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(15)$

٤) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(15)$ ثم أوجد زمرة الخارج $\mathrm{U}(15)/\mathrm{K}$.

٥) أوجد جميع الزمرة الجزئية التي مرتبة كل منها تساوي 2 في الزمرة $U(15)$.

٦) لتكن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $K \oplus Z_3$ دوارة ولماذا ؟ ثم اوجد مرتبة العنصر $(2,2)$ في الزمرة $U(15) \oplus Z_3$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية التكميلية (٢٠١٦) :

السؤال الأول

١) لنبرهن أن $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ فإن :

١) $\mathcal{P}$ انعكاسية لأن : بما ان Σ تجزئة للمجموعة P فهذا وحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة

$$P = \bigcup_{A\ \epsilon \Sigma} A$$

لنأخذ عنصر كيفي من P فيكون $a \ \epsilon \ P$ وبذلك $a \ \epsilon \bigcup_{A\ \epsilon \Sigma} A$

$$\exists\, A \,\epsilon\, \Sigma\,;\ a \,\epsilon\, A \ \Longrightarrow a\mathcal{P}a$$

٢) $\mathcal{P}$ تناظرية لأن :

لنأخذ عنصريين كيفيين

$$a,b \,\epsilon\, P :\ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow\ \exists\, B \,\epsilon\, \Sigma\ ;\ a,b \,\epsilon\, B\ ,\ \ b,a \,\epsilon\, B\ \Longrightarrow b\mathcal{P}a$$

٣) $\mathcal{P}$ متعدية لأن : لنأخذ ثلاث عناصر كيفية :

$$\forall a,b,c\ \,\epsilon\, P$$

$$a\mathcal{P}b\ \exists\ A \,\epsilon\, \Sigma\ ;\ \ a,b \,\epsilon\, A$$

$$b\mathcal{P}c\ \exists\ B \,\epsilon\, \Sigma\ ;\ b,c \,\epsilon\, B$$

$$\Longrightarrow \mathrm{b} \,\epsilon\, A \cap B\ \Longrightarrow A \cap B\ \neq \emptyset$$

وكون Σ تجزئة للمجموعة P فإن :

$$A = B$$

ومنه $a\ ,c\ \,\epsilon\, A \Longrightarrow a\mathcal{P}c$ ومنه $\mathcal{P}$ متعدية .

لنثبت الان ان

$$\Sigma = {}^{P}\!/_{\mathcal{P}}$$

ليكن

$$\bar{a} \epsilon\, {}^{P}\!/_{\mathcal{P}}\,;\ a \,\epsilon\, P = \bigcup_{A\ \epsilon \Sigma} A$$

ومنه يوجد $B \,\epsilon\, \Sigma$ بحيث $a \,\epsilon\, B$ ولنبرهن على ان $\bar{a} =\ B$

ليكن $x \,\epsilon\, \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}x$ حسب تعريف علاقة التكافؤ

فإنه يوجد $D \epsilon \Sigma$ بحيث $a, x \epsilon D$

أصبح لدينا $B, D \epsilon \Sigma$ و $a\epsilon B, D$ وبالتالي $a\epsilon B \cap D$
وحسب الشرط الثاني وبما أن Σ تجزئة للمجموعة P فينتج أن $B = D$ أي أن :
$x \epsilon D$ وبالتالي $\bar{a} \subseteq B$

ليكن $y \epsilon B$ عندئذ $a , y \epsilon B$ وحسب تعريف $\mathcal{P}$ فإن :

$y\mathcal{P}a$ ومنه $y \epsilon \bar{a}$ وبالتالي $B \subseteq \bar{a}$

بذلك اثبتنا ان $\bar{a} = B$

وجدنا انه اخذنا $a \epsilon P$; $\bar{a} \epsilon {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ كيفي وجدنا انه $\bar{a} = B \in \Sigma$ مما يعني انه

$$ {}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma $$

لنثبت الاحتواء المعاكس

لنأخذ عنصر كيفي وليكن $G \epsilon \Sigma$ وبما ان Σ تجزئة للمجموعة P فحسب الشرط الاول من شروط التجزئة نجد ان $G \neq \phi$ وهذا يعني على الاقل انه يوجد عنصر وليكن $g \epsilon G$
ولنبرهن أن $\bar{g} = G$
ليكن $x \epsilon G$ وبما ان $g \epsilon G$ فإن $g\mathcal{P}x$ وبالتالي $x \epsilon \bar{g}$ ومنه $G \subseteq \bar{g}$
ليكن $y \epsilon \bar{g}$ عندئذ $g\mathcal{P}y$ ومنه يوجد $D \epsilon \Sigma$ بحيث $g, y \epsilon D$
ومنه $g \epsilon G \cap D$ وبذلك يكون $G = D$ أي $y \epsilon G = D$ ومنه $\bar{g} \subseteq G$
ومن الاحتوائيين :
$G \subseteq \bar{g}$ و $\bar{g} \subseteq G$ يكون $\bar{g} = G \epsilon \Sigma$ ومنه $\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$

ومن الاحتوائيين :
$\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ و ${}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$ يكون $\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$

٢) تمهيدية زورن : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى

(ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

٣) لنأخذ المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z \ , \ a - k.b \ \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

- $0 \in S$ وهنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $0 = a - k.b$ أي أن $a = k.b$

وهنا $r = 0$ و $k = q$ ويتم المطلوب .

بقي ان نثبت ان q, r يتعينان بشكل وحيد .

إن الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

وفرضاً $r = 0 \Leftarrow$ نفرض انه يوجد $q, q_1 \Leftarrow a = q.b \ \wedge a = q_1.b$

ومنه $q.b = q_1.b \Leftarrow q = q_1$ متساويان لان $b > 0$

- $0 \notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

- $a > 0$ عندئذ نختار $k = 0$ فيكون : $a - b.k = a > 0$ ومنه $a - b.k > 0$ ومنه $a - b.k \in S$ ومنه S ليست خالية .
- $a < 0$ عندئذ نختار $k = 2a$ نجد أن :

$$a - (2a).b > 0$$

وبالتالي المجموعة $.a + 2a.b \in S \ \Rightarrow S \neq \emptyset$

- $a = 0$ نختار $k = -1$ فنجد : $a - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$ وهكذا نجد أن Sغير خالية.

مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ وكما أن $S \subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ حيث :

$$r = a - q.b \quad : \quad q \in Z$$

أي أن : $a = q.b + r$

الأن لنبرهن أن $r < b$:

لدينا العلاقة من أجل عددين إما: $\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases}$

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ:$r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1 + q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overbrace{r}^{\text{موجب}} - \overbrace{b}^{\text{موجب}} > 0$$

ومنه $a-(1+q)b \in S$

$$a-(1+q)b < a-q.b = r \Longrightarrow a-(1+q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S .

الحالة الثانية : نفرض أن $r = b$ عندئذ:

$$a-(1+q).b = \underbrace{a-qb}_{r} - b$$

وبالتالي $r - b = 0$

ومنه $a-(1+q)b \in S$ وقيمته تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0 \in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة ويكون لدينا $r < b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0 \in S$ كان $r = 0$

في الحالة الثانية $r > 0$ وبحالة $0 \notin S$ كان $0 < r < b$

وبكلتا الحالتين $0 \leq r < b$

بقي ان نبرهن الوحدانية بالنسبة للحالة الثانية

لنفرض أن : $a = q_1.b + r_1$ و $a = q.b + r$

حيث : $q, q_1, r, r_1 \in Z$ وأن $0 \leq r, r_1 < b$.

لنفرض جدلا أن $r \neq r_1$ عندئذ $q.b + r = q_1.b + r_1$

لنفرض أن $r_1 < r$ حيث $r - r_1 > 0$

$$\Rightarrow (q_1 - q)b = r - r_1 \geq b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$

وبالتالي $r = r_1 \Leftarrow (q_1-q)b = 0$ ولدينا $b \neq 0$ ومنه $(q_1 - q) = 0 \Leftarrow q_1 = q$

ويتم المطلوب.

٤) ليكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

٣) نقول عن العنصر $a \in A$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة A إذا حقق :

$$\forall x \in A ;\ a \leq x$$

٤) نقول عن العنصر $b \in A$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة A إذا حقق :

$$\forall y \in A ; y \leq b \Rightarrow y = b$$

كل عنصر أصغر يكون عنصر أصغري

١) **البرهان:** ليكن $a \in A$ عنصر أصغر في A :

هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall x \in A \quad ; a \leq x \dots\dots\dots\dots (*)$$

ولنفرض أن b عنصر اصغري في P :

و هذا يعني انه وحسب التعريف

$$\forall y \in A ; y \leq b \Rightarrow y = b \dots\dots\dots \quad (**)$$

ولكن $(*)$ محققة من أجل جميع قيم x من A وبفرض أن $x = b$ وبالاستفادة من $(**)$ نجد ان $a = b$

ومنه العنصر الاصغر يكون عنصر أصغري .

مثال معاكس :

لتكن المجموعة $A = \{a,b,c,d\}$ ولنأخذ f حيث :

$$f = \{\{a\},\{a,b\},\{c,b\},\{a,b,c\}\}$$

نلاحظ ان f مجموعة مرتبة جزئيا بالنسبة لعلاقة الاحتواء وفيها $\{a\}$ عنصر أصغري بينما هو ليس عنصر أصغر لأن $\{a\} \not\subset \{c,b\}$

السؤال الثاني

١) $\emptyset \neq Z(G) \subseteq G$ لأن $e \in G$ وأن $\forall x \in G : e.x = x.e$

وليكن $a,b \in Z(G)$ عندئذ :

$$\forall x \in G : a.x = x.a \quad , b.x = x.b$$

$$x.b^{-1} = b^{-1}.x \xLeftarrow{\text{نضرب بالمقلوب من اليسار}} b.x.b^{-1} = x \xLeftarrow{\text{نضرب بمقلوب } b \text{ من اليمين}}$$

$$x(a.b^{-1}) = (xa)b^{-1} = (ax)b^{-1} = a(xb^{-1}) = a(b^{-1}.x) = (ab^{-1})x$$

$$a.b^{-1} \in Z(G)$$

وهذا يبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G .

٢) لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H معرفة وهي زمرة الخارج ولنعرف العلاقة f .

$$f : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall\, a \in G \;:\; f(a) = aH$$

فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه إذا كان $\forall \quad a,b \in G \quad : \quad a = b \Longrightarrow aH = bH$

كما أن f تشاكل لأنه حسب التعريف : $f(a.b) = (a.b)H = (aH).(bH) = f(a).f(b)$

إن f غامر لأنه لأجل $d.H \;\in G/H$ عندئذ $d \in G$ ومنه $f(d) = d.H$

اثبتنا انه تشاكل زمري غامر بقي ان نثبت أن H نواة أي لنبرهن أن $H = \ker f$:

ليكن $x \in \ker f$ عندئذ $x \in G$ حيث $f(x) = x.H = H(\text{المحايد})$

$x \in \ker f$ لأن $x.H = H$ ومنه $x \in H$ أي أن :

$$\ker(f) \subseteq H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in H$ وطالما H زمرة جزئية في G فإن $y \in G$ أي أن y ينتمي للمنطلق فنأخذ الصورة المباشرة له .

$$f(y) = \underbrace{y}_{y \in H} .H = \underbrace{H}_{\text{محايد المستقر}}$$

وهذا يبين أن $y \in \ker f$ ومنه $H \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\ker(f) = H$$

٣) لنفرض أن $(G : 1) = m.P$ حيث m عدد صحيح وحسب الاستقراء على m حيث $m \geq 1$: من أجل $m = 1$

فإن $(G:1) = P$

عندئذ $G = < a >$ دوارة فإن : $(G:1) = o(a) = P$

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية **و المحتواة تماماً** في G .

نميز حالتين :

١) توجد في G زمرة جزئية $K \neq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P وحسب لاغرانج فإن :

$$m.P = (G:1) = (G:K)(K:1)$$

وبما أن $(G:K)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(K:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في K عنصر مرتبته P وبالتالي فإن في G عنصر مرتبته P .

٢) أدلة كل الزمر الجزئية المحتوات تماما في G تقبل القسمة على P .
لنفرض أن l هي جميع الزمر المحتواة تماما في G . ولنفرض أن H هو العنصر الأكبر في l من حيث المرتبة .

إن $H \neq G$ زمرة جزئية أعظمية (كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي) ولنفرض أن $S = (H:1)$

اذا كان S يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P ويتم المطلوب .

أما اذا كان S لايقبل القسمة على P لدينا $H \subsetneqq G$ عندئذ يوجد عنصر $x \in G$ بحيث $x \notin H$ ولنفرض أن

$T = < x >$ وأن $(T:1) = t$

نلاحظ أن $H.T$ زمرة جزئية في G وأن $H \subsetneqq H.T$ ومنه $G = H.T$ (لان H أعظمية ووجدنا أكبر منها ولا تساويها فهي حتما $G = H.T$ لأنه فرضنا أن $H \subsetneqq G$)

أيضا لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$\frac{G}{H} = \frac{H.T}{H} \cong \frac{T}{H \cap T}$$

ومنه

$$\left(\frac{G}{H}:1\right) = \left(\frac{T}{H \cap T}:1\right)$$

مرتبه زمرة الخارج هو الدليل وبالتالي

$$(G:H) = (T:H \cap T)$$

حسب لاغرانج $(G:1) = (G:H)(G:1)$

$$m.p = (G:1) = (T:H \cap T)(\underbrace{H:1}_{P\text{ لا تقبل القسمة على}})$$

ولما كانت مرتبة H لا تقبل القسمة على P عندئذ :

$(T: H \cap T)$ تقبل القسمة على P .

وبما فإن : $$(T:1) = (T:T \cap H)(T \cap H:1)$$

ولما كانت T دوارة فإن T تحوي زمرة جزئية مرتبتها P هي $< x^{\frac{t}{P}} >$ وهذه يبين أن
$$x^{\frac{t}{P}} \epsilon G$$

وأن مرتبتها : $$O\left(x^{\frac{t}{P}}\right) = P$$

٤) واضح أن $G \supseteq A.B \neq \emptyset$ وليكن $x, y \epsilon A.B$ عندئذ وحسب تعريف جداء المجموعات فإن :

$$x = a.b \quad ; \quad a, a_1 \epsilon A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b, b_1 \epsilon A$$

ومنه $$x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1}$$
$$= a.b.\underbrace{a_1{}^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1}$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1} \ \epsilon \ a_1.B.a_1{}^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.b_1{}^{-1}.a_1{}^{-1} = b_0 \epsilon B$ ولنعوض
$$x.y^{-1} = a.b.a_1{}^{-1}.b_0 = a.\underbrace{a_1{}^{-1}.a_1}_{\text{المحايد}}.b.a_1{}^{-1}.b_0$$

بما أن الزمرة الجزئية B ناظمية في G فإن $a_1.b.a_1{}^{-1} \ \epsilon \ a_1.B.a_1{}^{-1} \subseteq B$

لنفرض أن $a_1.b.a_1{}^{-1} = b' \epsilon B$ ولنعوض
$$x.y^{-1} = \underbrace{a.a_1{}^{-1}}_{\epsilon A}.\underbrace{b'.b_0}_{\epsilon B} \ \epsilon \ A.B$$

ومنه $A.B$ زمرة زمرة جزئية في G .

٥) لنفرض أن G زمرة منتهية وأن $(G:1) = P$ حيث P عدد أولي عندئذ يوجد $a \epsilon G$ ولنأخذ الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر $a \neq e$ مرتبتها لا تساوي 1 وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة الجزئية تقسم G وبالتالي $(< a >:1) = P$ وهذا يبين أن $G =< a >$ اي أن G دوارة .

السؤال الثالث

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15),.)$.

الحل :

$$U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ ,0 < x < n \ , \quad \gcd(x,n) = 1\}$$
$$U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

$$1.1 = 1 \ , \quad 2.8 = 1 \ , \quad 4.4 = 1$$

$$7.13 = 1 \ , \quad 8.2 = 1 \quad , \quad 11.11 = 1$$

$$13.7 = 1 \quad , \ 14.14 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

$$1^1 = 1$$

$$2^1 = 2 \quad ,2^2 = 4 \ ,2^3 = 8 \ ,2^4 = 1$$

$$4^1 = 4 \quad ,4^2 = 1$$

$$7^1 = 7 \ ,7^2 = 4 \ ,7^3 = 13 \ ,7^4 = 1$$

$$8^1 = 8 \ ,8^2 = 4 \ ,8^3 = 2 \ ,8^4 = 1 \ ,$$

$$11^1 = 11 \ ,11^2 = 1$$

$$13^1 = 13 \ ,13^2 = 4 \quad ,13^3 = 7 \ ,13^4 = 11$$

$$14^1 = 14 \quad ,14^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
$o(a)$	1	4	2	4	4	2	4	2

٢) $U_k(n) = \{x \ : x \in U(n) : \mathrm{x \bmod - k = 1} \ \}$

$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$ $\qquad$ $U_5(15) = \{1,11\}$

$U_5(15) =< 11 >$ و $U_3(15) =< 4 >$

اي أن كلاهما دوارتين

٣) نلاحظ أن المجموعة K منتهية وجزئية من $U(15)$ وإثبات أن K زمرة جزئية في $(U(15),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall\, x,y \in \mathrm{K} \ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

$$2^0 = 1 \ \ , \ 2^1 = 2\,, 2^2 = 4, \ 2^3 = 8 \Longrightarrow H =< 2 >$$

٤) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(15):K) = \frac{(U(15):1)}{(K:1)} = \frac{8}{4} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.K$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$K = 1.K = \{1,2,4,8\} = 2.K = 4.K = 8.K$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.K = \{7,14,13,11\} = 11.K = 13.K = 14.K$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : K ,$7.K$.

لنوجد زمرة الخارج :

وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(15)}{K}=\{a.K\ \ : a\in U(15)\}=\{K,7.K\}$$

٥) الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 2 هي

$$<11>=\{1,11\},<4>=\{1,4\},<14>=\{1,14\}$$

٦) ليكن H,K زمرة دوارة منتهية إن الشرط الازم والكافي لكي تكون الزمرة $K\oplus H$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H,K عددين أوليين فيما بينهما

$$(K:1)=4$$
$$(Z_3:1)=3$$
$$\gcd(4,3)=1$$

وبالتالي $Z_3\oplus K$ دوارة

$$o(2,2)=Icm\big(o(2),o(2)\big)=Icm(4,3)=12$$

انتهى حل الدورة الفصلية التكميلية ☺

أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦) :

السؤال الأول :

١) أثبت ان كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغري .

٢) أذكر نص كل مما يأتي : الشرط الأصغري – مبدأ الاستقراء – تمهيدية زورن .

٣) أثبت ان كل مجموعة مرتبة جزئيا وتحقق الشرط الأصغري تكون محققة لمبدأ الاستقراء .

٤) لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P وليكن $a, b \in P$ ولنفرض أن $\bar{a}, \bar{b}$ صفي تكافؤ المولدين بالعنصرين a, b على الترتيب , أثبت أنه $\begin{cases} \bar{a} = \bar{b} : & \text{إما} \\ \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset : & \text{أو} \end{cases}$.

السؤال الثاني : لتكن G زمرة والمطلوب :

١) اذا كان $a, b \in G$ أثبت أن $(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

٢) اذا كانت الزمرة G دوارة . أثبت أن اي زمرة جزئية في G تكون أيضاً دوارة .

٣) لتكن H مجموعة جزئية منتهية في G . أثبت أن الشرط الازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط الأتي : $\forall\, a, b \in H \quad ; \quad a.b \in H$

٤) اذا كانت $(G:1) = 15$ أثبت أن الزمرة G في هذه الحالة تكون دوارة .

٥) تكون H, K زمرتين جزئيتين في G . اذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G أثبت أن:

$$H.K/K \cong H/H \cap K$$

٦) لنفرض أن $G = Z$ زمرة الأعداد الصحيحة . أثبت أنه لاجل اي عدد صحيح $m > 1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G وهل من اجل $m = 5$ تكون Z_5 زمرة جزئية في G او تماثل $5Z$؟.

السؤال الثالث : لتكن $U(14)$ زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 16 المطلوب:

١) أوجد عناصر الزمرة $U(14)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $(U(14),.)$

٢) أثبت أن الزمرة $U(14)$ دوارة. ثم أوجد مولداتها .

٣) اوجد الزمرتين الجزئيتين $U_7(14)$ و $U_2(14)$ ثم بين اي منهما دوارة

٤) أثبت ان المجموعة $K = \{1,9,11\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(14)$.

٥) أوجد جميع المرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(14)$ ثم أوجد زمرة الخارج $U(14)/K$.

٦) أوجد جميع الزمرة الجزئية التي مرتبة كل منها تساوي 2 في الزمرة $U(14)$.

٧) لتكن Z_3 زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 3 . هل الزمرة $Z_3 \oplus U(14)$ دوارة ولماذا ؟ ثم اوجد مرتبة العنصر $(3,2)$ في الزمرة $Z_3 \oplus U(14)$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الثانية (٢٠١٦) :

السؤال الأول

١) لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية في N

نميز الحالات التالية:

١) $S = N$ عندئذ S تحتوي عنصر أصغر او إذا كان $0 \in S$ عندئذ S تحوي عنصر أصغر .

٢) $S \neq N$ و $0 \notin S$

لنأخذ المجموعة: $L = \{a : a \in N\,;\, a \leq x \quad \forall\, x \in S\ \} \qquad (*)$

$L \neq \Phi$ لان $0 \in L$ كما ان $L \neq N$

لأنه اذا فرضنا جدلاً أنه $L = N$ عندئذ يوجد $a \in S$ عندئذ $a + 1 \in L = N$ و ان $a + 1 < a$ وهذا تناقض ومنه $L \neq N$

وبالتالي يوجد عنصر $b \in L$ بحيث $b + 1 \notin L$ لآنه اذا كان لأجل $b \in N$ اذا كان $b \in L$ فإن $b + 1 \in L$ نجد ان $L = N$وهذا غير ممكن .

ولما كان $b \in l$ فإن $\forall\, x \in s\ ;\ b \leq x$

ولنبرهن أن $b \in S$

لنفرض جدلاً ان $b \notin S$عندئذ

$$\forall\, x \in S\ ;\ b < x$$

اي ان $x - b \in N$

$$x - b > 0$$

نفرض أن $x - b = m$

عندئذ $x = m + b$

نضيف ونطرح مقدار (١) نجد : $x = (m-1) + (b+1)$

وبالتالي فإن $\forall\, x \in s\ ;\ b + 1 \leq x$

وحسب الفرض فإن $b + 1 \in L$ وهذا يناقض كون $b + 1 \notin L$

ومنه فإن $b \in S$ ويحقق

$$\forall\, x \in S\ ;\ b \leq x$$

وهذا يبين ان العنصر x هو عنصر أصغر في s

كون N مجموعة مرتبة جزئياً وبما أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري نجد أن كل مجموعة جزئية وغير خالية في N تحوي عنصر أصغري و وهذا هو المطلوب .

٢) الشرط الأصغري : كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .

مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما

a_ إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

b_ ولتكن $a \in P$ إذا كانت جميع العناصر $x \in P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ .

عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

تمهيدية زورن :

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى (ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

٣) لتكن $(P, \leq)$ مجموعة جزئية مرتبة

إذا كانت θ: التي لا تحقق القضية P هي مجموعة العناصر Mلنفرض

٣) $M = \phi$ يتم المطلوب.

٤) $M \neq \phi$ عندئذ وحسب الفرض فإن يوجد في M عنصر أصغري وليكن a بالتالي a لا يحقق القضية θ .

وايضا a ليس أصغريا في P لآنه لا يحقق القضية θ .

ومنه يوجد عنصر $x \in P$ بحيث $x < a$ وان $x \neq a$.

وبالتالي فإن $M \quad x \notin$ وهذا يبين ان العنصر x يحقق القضية θ.

وحسب الفرض b فإن العنصر a يحقق القضية θ وهذا غير ممكن وبالتالي $M = \phi$.

أي ان جميع عناصر المجموعة p تحقق القضية θ.

٤) إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ فإنه يتم المطلوب .

إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ أي تحويان على الأقل عنصر مشترك

$\exists\, d \in \bar{a} \cap \bar{b} : d \in P$

حسب مبرهنة اذا كان عنصر من احد صفوف التكافؤ قد انتمى إلى صف تكافؤ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنحقق ذلك :

$$d \in \bar{a} \quad \Rightarrow \bar{d} = \bar{a} \quad , \; d \in \bar{b} \quad \Rightarrow \bar{d} = \bar{b}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} = \bar{b}$$

السؤال الثاني

١) بما أن $a, b \in G$ فإن $a.b \in G$ ومنه لكل عنصر مقلوب أي : $(a.b)^{-1} \in G$ ويحقق أي عنصر .

مع المقلوب له يعطي المحايد أي أن : $(a.b).(a.b)^{-1} = e$.

$$a(b.(a.b)^{-1}) = e \; .$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$b.(a.b)^{-1} = a^{-1} \; .$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

٢) بما أن G زمرة دوارة فإنها مولدة بالعنصر a أي أن $G =< a >$ وبالتالي :
نميز حالتين :لتكن H زمرة جزئية في G

- إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H =< e >$ وبالتالي H زمرة دوارة .
- لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $y \in H$ وإن $y \neq e$ ولما كان $y \in G$ فإنه يوجد $t \in Z$ بحيث $y = a^t$

نأخذ المجموعة $l : \{s \; , s \in N^* \; : \; a^s \in H \}$

$\emptyset \; \neq l \subseteq N^*$ لأن $a^t \in H$ وبالتالي $t \in l$ ومنه l تحوي عنصر أصغر وليكن k ومنه $< a^k > \subseteq H$ أي أن $a^k \in H$.

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $x \in H$ ومنه $x = a^m$ حيث $m \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل عددين k, m يوجد $q, r \in Z$ بحيث
$m = qk + r$ وأن $0 \leq r < m$
لنفرض جدلا أن $r \neq 0$ عندئذ $0 < r < m$

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk}.a^r = (a^k)^q.a^r$$

نضرب بمقلوب a^{qk} نجد $a^r = a^{-qk}.a^m \in \mathrm{H}$ وبالتالي فإن $r \in l$ و $r < k$ يوجد عنصر اصغر من k
وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ لأن k عنصر اصغر ومنه $r = 0$ ومنه $m = qk$ وبالتالي :

$$x = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \in < a^k >$$

وهكذا نجد ان $H \subseteq < a^k >$ وبالتالي فإن $H =< a^k >$

٣) البرهان :

١) لزوم الشرط : لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ حسب المبرهنة الاخيرة فإنها تحقق الشرط الثاني أي تحقق a,b $\forall\, a,b \in H\,; a.b \in H$ ويتم المطلوب .

٢) كفاية الشرط : لنفرض أن H تحقق الشرط a,b $\forall\, a,b \in H\,; a.b \in H$ ولنبرهن على انه

$$\forall\, a \in H\,;\quad a^{-1} \in H$$

- ليكن $a \in H$ نميز حالتين :

١) $a = e$ عندئذ $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$

٢) $a \neq e$ وحسب الشرط اذا كان $a = b \Leftarrow a, a^2, a^3, \ldots\ldots \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i, j \in N$ بحيث $i \neq j$ و أن $a^i = a^j$ وكون $i \neq j$ نفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$

أي أن $i - j \geq 1$

لدينا أيضا $a^i = a^{i-j}.a^j$

$$(a^i)(a^i)^{-1} = a^{i-j}.a^i.(a^i)^{-1} \quad (*)$$

وهذا يبين أن $e = a^{i-j}$ $i - j \neq 1$ لأنه بحالة $i - j = 1$ فإنه العلاقة $(*)$ تصبح $a = e$ وهذا يخالف كوننا فرضنا أن $e \neq a$ وهذا يبيين أن $i - j \neq 1$ ومنه فإن $i - j > 1$ وبالتالي $i - j - 1 > 0$

ونحن لدينا $\mathrm{i} - \mathrm{j} - 1 \in \mathrm{N}$; $a.\underbrace{a^{i-j-1}}_{a \text{ مقلوب}} = e$

حيث $a^{i-j-1} \in H$ ونضرب مع عنصر ينتمي إلى H فنحصل على المحايد .

وهذا يبيين أن $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$ مما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G.

٤) لدينا $(G:1) = 15 = 3.5$ حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن G تحوي عنصر مرتبته 3 وليكن a وأيضا تحوي عنصر مرتبته 5 وليكن b وأن $a \neq b$ حيث $a, b \in G$

$$o(a) = 3 \quad , \quad o(b) = 5$$

نفرض ان $H =< b >$ وأن $K =< a >$ كل منهما زمر دوارة

وأن $H \cap K =< e >$ لأنه إذا كان $y \in H \cap K$ وأن .

بفرض أن $o(y) = \alpha$ نجد ان $y^\alpha = e$

$$y \in K \;\; ; \;\; y^3 = e$$

$$y \in H \;\; ; \;\; y^5 = e$$

ومنه α يقسم 3,5 وبالتالي $\alpha = 1$ ومنه $y = e$

إن K هي زمرة 3− زمرة جزئية سيلوفية في G ((" كون 3^2 لا تقسم مرتبة G فإن فإن 3− هي سيلوفية 11 "))
وعدد هذه الزمر الجزئية تساوي $1+3K$ وتقسم مرتبة G

$K=0$ 1 مقبول

$K=1$, $K=2$ $\begin{cases}4\\7\end{cases}$ مرفوض كون كل واحد منهم لا يقسم مرتبة G

بالتالي $K\neq 0$ فإن العدد $1+3K$ لا يقسم مرتبة G وهذا يبين انه يوجد 3− زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

إن H هي 5− زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 **وعدد هذه االزمر الجزئية يساوي $1+5H$ ويجب أن يقسم مرتبة G .**

$K=0$ 1 مقبول

$K=1$, $K=2$ $\begin{cases}6\\11\end{cases}$ مرفوض

وهذا أيضا نلاحظ أن لأجل $K\ \neq 0$ فإن العدد $1+5K$ لايقسم مرتبة G وبالتالي توجد زمرة جزئية واحدة فقط من الشكل : 5− زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها 5 واحدة فقط وبالتالي فهي ناظمية .

أصبح لدينا K,H زمرة جزئية ناظمية في G ومن فإن $K.H$ زمرة جزئية في G

$$G=H\times K$$

٥) لنعرف العلاقة : $\frac{H.K}{k} \rightarrow H : f$ بالشكل :

$$\forall\, h \in H \quad ; \quad f(h)=h.k$$

وحسب تعريفنا للجداء فإن $H\ \subseteq H.K$ فنجد أن f تطبيق لأنه إذا كان :

$$h_1,h_2 \in H \quad : \ h_1=h_2 \ \Longrightarrow\ h_1.k=h_2.k$$

$$\Longrightarrow\ f(h_1)=f(h_2)$$

وأيضا f تشاكل :

$$f(h_1.h_2)=(h_1.h_2).k$$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج

$$=(h_1.k).(h_2.k)=f(h_1).f(h_2)$$

وهذا غامر لأن إذا كان $\bar{z} \in \frac{H.K}{k}$ حيث $\bar{z}$ مرافقة للزمرة k في $H.K$ عندئذ يوجد $g \in H.K$ بحيث
$\bar{z}=g.k$

وبما أن $g \epsilon H.K$ فإنه حسب تعريف الجداء :

$$h \epsilon H \ , \ x \epsilon k \quad ; \ g = h.x$$

ومنه $\bar{z} = g.k = (h.x).k$

وحسب تعريف الضرب في زمرة الخارج :

$$\bar{z} = (h.k)(x.k)$$

$$\bar{z} = (h.k).k = h.k$$

((وحسب التعريف وبما أن $x \epsilon H$ و H هي المنطلق لنأخذ الصورة المباشرة لـx))

$$f(x) = x.k = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى $\frac{H.k}{k} \cong \frac{H}{\ker f}$ سنبرهن تساوي

$$\ker f = H \cap k$$

ليكن $a \epsilon \ker f$ عندئذ :

$$f(a) = \underbrace{k}_{\text{محايد المستقر}}$$

وحسب التعريف فإن : $f(a) = a.k$

وهنا نجد أن $a.k = k$ وبالتالي $a \epsilon k$

وكون $\ker f$ في المنطلق فإن $a \epsilon H$ فنجد أن $a \epsilon H \cap k$ وبالتالي

$$\ker f \subseteq H \cap k$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $b \epsilon H \cap k$ وطالما $b \epsilon H$ فنأخذ الصورة المباشرة $b \epsilon k$ حيث :

$$f(b) = b.k = k$$

عنصر في المنطلق مرتبط بالمحايد في المستقر ومنه :

$b \epsilon \ker f$ أي أن $H \cap k \subseteq \ker f$

ومن الاحتوائين نجد : $H \cap k = \ker f$ و عليه يكون :

$$\frac{H}{H \cap K} = \frac{H}{Ker(f)} \cong \frac{k.H}{H}$$

٦) لنثبت أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $(\mathbb{Z},+)$ أي لنثبت أن :

$$m\mathbb{Z} = \{m.n \quad : \quad n\epsilon\mathbb{Z}\}$$

إن $\emptyset \neq m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ لأن $0 \epsilon\, m\mathbb{Z}$ على الأقل .

ليكن $x, y \epsilon\, m\mathbb{Z}$ عندئذ يوجد $\varphi, \beta \in \mathrm{m}\mathbb{Z}$ بحيث :

$$x = m.a \qquad , y = mb$$

$$\Longrightarrow x - y = m.a - m.b = m(a-b)$$

$$\Longrightarrow (a-b)\,\epsilon\,\mathbb{Z} \;\; \Longrightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

وبالتالي $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$

نلاحظ أن $(\mathbb{Z}_5,+)$ ليست زمرة جزئية من $G = \mathbb{Z}$ لأن العملية المعرفة عليها ليست ذات العملية المعرفة على $\mathbb{Z}$.

كما أن $\mathbb{Z}_5$ لا تماثل $5\mathbb{Z}$ وذلك بملاحظة ما يلي :

$$\alpha : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$$

لنفرض جدلاً أن $5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$

$$\alpha(5) = \alpha(1+1+1+1+1) = \alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1) + \alpha(1)$$

$$= 5.\alpha(1) = 0 \Longrightarrow \alpha(5) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(5) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $0 = 5$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا يوجد تماثل

السؤال الثالث

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(14),.)$.

الحل :

$$U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ ,0 < x < n \ , \quad \gcd(x,n) = 1\}$$
$$U(14) = \{1,3,5,9,11,13\}$$

$$1.1 = 1 \ , \quad 3.5 = 1 \ , \quad 11.9 = 1$$

$$13.13 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	3	5	9	11	13
a^{-1}	1	5	3	11	9	13

$$1^1 = 1$$

$$3^1 = 3 \quad ,3^2 = 9 \ ,3^3 = 13 \ ,3^4 = 11 \ ,3^5 = 5 \ ,3^6 = 1$$

$$5^1 = 5 \quad ,5^2 = 11 \ ,5 = 13 \ ,5^4 = 9 \ ,5^5 = 3 \ ,5^6 = 1$$

$$9^1 = 9 \ ,9^2 = 11 \ ,9^3 = 1$$

$$11^1 = 11 \ ,11^2 = 9 \ ,11^3 = 1$$

$$13^1 = 13 \ ,13^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	3	5	9	11	13
$o(a)$	1	6	6	3	3	2

٢) نلاحظ أن مرتبة العنصر

$$(\mathrm{U}(14):1) = 6$$

$$(<3>:1) = 6$$

وبالتالي $\mathrm{U}(14) = <3>$ ومولداتها هي $<3>$ و $<5>$

٣) $U_k(n) = \{x \ : x \in U(n) : \mathrm{x} \bmod - \mathrm{k} = 1 \ \}$

$U_7(14) = \{1\}$ $\qquad U_2(14) = \{1,3,5,9,11,13\}$

بما انهما زمرتين جزئيتين من الزمرة $\mathrm{U}(14)$ وحسب مبرهنة كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون ايضاً دوارة.

اي أن كلاهما دوارتين

٤) نلاحظ أن المجموعة K منتهية وجزئية من $U(14)$ وإثبات أن K زمرة جزئية في $(U(14),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall\, x, y \in \mathrm{K} \ ; x.y \in K$$

$\odot$	1	9	11
1	1	9	11
9	9	11	1
11	11	1	9

وحسب مبرهنة كل زمرة جزئية من زمرة دوارة تكون ايضاً دوارة.

٥) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(14):K) = \frac{(U(14):1)}{(K:1)} = \frac{6}{3} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.K$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$K = 1.K = \{1,9,11\} = 9.K = 11.K$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.K = \{3,13,5\} = 5.K = 13.K$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : K ,$3.K$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(14)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(14)$ فإن K ناظمية في $U(14)$ وبالتالي $\frac{U(14)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(14)}{K} = \{a.K \ : a \in U(14)\} = \{K, 3.K\}$$

٦) الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 2 هي

$$< 13 >= \{1,13\}$$

٧) ليكن H, K زمرة دوارة منتهية إن الشرط الازم والكافي لكي تكون الزمرة $H \oplus \mathrm{K}$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K عددين أوليين فيما بينهما

$$(U(14):1) = 6$$
$$(Z_3:1) = 3$$
$$\gcd(6,3) = 3$$

وبالتالي $U(14) \oplus Z_3$ ليست دوارة

$$o(2,2) = Icm(o(3), o(2)) = Icm(6,3) = 3$$

انتهى حل الدورة الفصلية الثانية لعام ٢٠١٦ ☺

حل أسئلة دورة الفصل الأول عام ٢٠١٦

السؤال الاول :

١) لتكن N,Z مجموعتي الأعداد الصحيحة والطبيعية على الترتيب , أثبت أن :

$$card\ N^* = card\ Z$$

٢) ليكن $a,b \in Z$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = q.b + r$ حيث $0 \le r < b$ فضلاً عن ذلك q,r يتعينان بشكل وحيد .

٣) لتكن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P وأن $a,b \in P$ أثبت أن: $a \in \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{a} = \bar{b}$

٤) أذكر نص كل من : شرط الاستقراء _ تمهيدية زورن.

السؤال الثاني : لتكن $(G\ ,.)$ زمرة . والمطلوب :

١) أذكر نص مبرهنة لاغرانج ثم أثبت على صحته .

٢) لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G أثبت أن كل زمرة جزئية من زمرة الخارج G/H هي من الشكل N/H حيث N زمرة جزئية في G تحوي H .

٣) اذا كانت الزمرة G تبديلية ومنتهية ومرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي p فأثبت أن الزمرة G تحوي عنصر مرتبته p .

٤) لتكن H,K زمرتين دوارتين منتهيتين أثبت أن الشرط الازم والكافي كي تكون $H \oplus K$ زمرة دوارة منتهية هو أن تكون مرتبة كل من H,K أعداد أولية فيما بينها .

٥) اذا كانت الزمرة G منتهية مرتبتها تساوي 4 , أثبت أن G إما تماثل Z_4 أو تماثل الزمرة $Z_2 \oplus Z_2$.

٦) لنفرض أن $G = Z$ زمرة الاعداد الصحيحة . أثبت أنه لأجل اي عدد صحيح $k > 1$ فإن المجموعة mZ تشكل زمرة جزئية في G . وهل من اجل $m = 10$ تكون Z_{10} زمرة جزئية في G أو تماثل $10Z$. ؟

السؤال الثالث : لتكن $(U(15), \ .)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 15 المطلوب :

١) أوجد عناصر الزمرة $U(15)$. ثم شكل جدولا تبين فيه مقلوب ومرتبة جميع عناصر الزمرة $U(15)$.

٢) أثبت ان المجموعة $\mathrm{K} = \{1,2,4,8\}$ تشكل زمرة جزئية دوارة في الزمرة $U(15)$ وأوجد جميع مولداتها.

٣) اوجد الزمرة $U_3(15)$.

٤) أوجد جميع مرافقات الزمرة الجزئية K في الزمرة $U(15)$ ثم أوجد زمرة الخارج $\mathrm{U}(15)/\mathrm{K}$.

٥) أوجد ثلاث زمر جزئية مختلفة في الزمرة $U(15)$ مرتبة كل منها تساوي 2 .

٦) هل الزمرة $U(15)$ هي $p-$زمرة. ؟ ٧) أثبت أن زمرة الخارج $\mathrm{U}(15)/U_3(15)$ دوارة .

٨) أوجد زمرة جزئية في N في الزمرة $U(15)$ تحقق $\mathrm{U}(15)/U_3(15) \cong \mathrm{N} \cong Z_3$.

انتهت الأسئلة

حل أسئلة الدورة الفصلية الأولى (٢٠١٦) :

السؤال الأول

١) لنعرف العلاقة $f : Z \to N^*$ بالشكل التالي :

$$\forall\, n \in Z \;\; ; \; f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$

إن f تطبيق لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $n = m$ عندئذ :

في حالة $; n, m \geq 0$ $\quad 2n+1 = 2m+1$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

في حالة $; n, m < 0$ $\quad 2|n| = 2|m|$

$$-n = -m$$

$$\Rightarrow f(n) = f(m)$$

ففي كلا الحالتين f تطبيق .

كما إن f متباين لأنه إذا كان $n, m \in z$ بحيث $f(n) = f(m)$ فإن :

- $n, m \geq 0 \;\Rightarrow\; 2n+1 = 2m+1 \;\Rightarrow\; n = m$
- $n, m < 0 \;\Rightarrow\; 2|n| = 2|m| \;\Rightarrow\; -n = -m \;\Rightarrow\; n = m$
- $m < 0 \;, n \geq 0 \;\Rightarrow\; 2n+1 = 2|m| = -m$

$$m = -\frac{2n+1}{2}$$

بفرض $n = 0$

$$m = -\frac{1}{2} \notin Z$$ مرفوض

ومنه الحالة الثالثة لا يمكن أن تكون موجودة ومنه f متباين .

واخيراً إن f غامر لأنه :

ليكن $n \in N^*$ عندئذ تميز حالتين :

n زوجي عندئذ : $\frac{n}{2} \in z$ و $-\frac{n}{2} \in z$

كون $-\frac{n}{2} \in z$ عنصر في المنطلق لذلك بإمكان أخذ الصورة المباشرة له .

$$f\left(\frac{-n}{2}\right) = 2\left|\frac{-n}{2}\right| = -(-n) = n$$

n فردي ومنه$n-1$ زوجي كما ان $0 \leq n-1$

عندئذ: $0 \leq \frac{n-1}{2} \in z$

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n$$

ومما سبق نجد أن التطبيق f غامر

وبالتالي فهو تقابل أي ان .

$$\Rightarrow card\ N^* = card\ Z$$

وهو المطلوب

٢) لنأخذ المجموعة : $S = \{a - k.b : k \in Z\ ,\ a - k.b \geq 0\}$

لنرى إذا كانت S خالية أم غير خالية وهنا نميز حالتين :

- $0 \in S$ وهنا واضح أن $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $k \in Z$ بحيث $0 = a - k.b$ أي أن $a = k.b$

وهنا $r = 0$ و $k = q$ ويتم المطلوب .

بقي ان نثبت ان q, r يتعينان بشكل وحيد .

إن الصفر يتعين بشكل وحيد (لا يوجد صفران غير متساويان)

وفرضاً $r = 0 \Leftarrow$ نفرض انه يوجد$q, q_1 \Leftarrow a = q.b\ \wedge a = q_1.b$

ومنه $q.b = q_1.b \Leftarrow q = q_1$ متساويان لان $b > 0$

- $0 \notin S$ يجب إثبات أن S غير خالية .

إذا لنبرهن أن $S \neq \emptyset$ سنميز ثلاث حالات :

- $a > 0$ عندئذ نختار $k = 0$ فيكون : $a - b.k = a > 0$ ومنه $a - b.k > 0$ ومنه $a - b.k \in S$
ومنه S ليست خالية .
- $a < 0$ عندئذ نختار $k = 2a$ نجد أن :

$$a - (2a).b > 0$$

وبالتالي المجموعة $S \neq \emptyset \;\acute{\Rightarrow}\; a + 2a.b \in S$.

- $a = 0$ نختار $k = -1$ فنجد : $a - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$ وهكذا نجد أن Sغير خالية.

مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ وكما أن $S \subset N$ ومنه S تحوي عنصر أصغر وليكن r حيث أن $r \in S$ حيث :

$$r = a - q.b \quad : \quad q \in Z$$

أي أن : $a = q.b + r$

الآن لنبرهن أن $r < b$:

لدينا العلاقة من أجل عددين إما : $\begin{cases} r > b \\ r = b \\ r < b \end{cases}$

الحالة الاولى : نفرض أن $r > b$ عندئذ: $r - b > 0$ و لنأخذ :

$$a - (1+q)b = \underbrace{a - qb}_{r} - b = \overbrace{r}^{\text{موجب}} - \overbrace{b}^{\text{موجب}} > 0$$

ومنه $a - (1+q)b \in S$

$$a - (1+q)b < a - q.b = r \Rightarrow a - (1+q)b < r$$

وهذا يناقض كون r عنصر أصغر في S .

الحالة الثانية : نفرض أن $r = b$ عندئذ:

$$a - (1+q).b = \underbrace{a - qb}_{r} - b$$

وبالتالي $r - b = 0$

ومنه $a - (1+q)b \in S$ وقيمته تساوي الصفر وهذا يناقض كون $0 \in S$ فتكون الحالة الثانية مرفوضة ويكون لدينا $r < b$

وبذلك يكون :

في الحالة الأولى $0 \in S$ كان $r = 0$

في الحالة الثانية $r > 0$ وبحالة $0 \notin S$ كان $0 < r < b$

وبكلتا الحالتين $0 \leq r < b$

بقي ان نبرهن الوحدانية بالنسبة للحالة الثانية

لنفرض أن : $a = q_1.b + r_1$ و $a = q.b + r$

حيث : $q, q_1, r, r_1 \in Z$ وأن $0 \leq r, r_1 < b$.

لنفرض جدلا أن $r \neq r_1$ عندئذ $q.b + r = q_1.b + r_1$

لنفرض أن $r_1 < r$ حيث $r - r_1 > 0$

$$\Longrightarrow\ (q_1 - q)b = r - r_1 \geq b$$

وهذا غير ممكن . ومنه $r = r_1$

وبالتالي $r = r_1 \Longleftarrow (q_1 - q)b = 0$ ولدينا $b \neq 0$ ومنه $(q_1 - q) = 0 \Longleftarrow q_1 = q$

ويتم المطلوب.

٣) " $\Leftarrow$ " بفرض أن $a \epsilon \bar{b}$ ومنه حسب التعريف $a\mathcal{P}b$ وذلك حسب تعريف صف التكافؤ .

الآن نأخذ عنصر كيفي ينتمي لـ $\bar{a}$ نثبت أنه ينتمي ل $\bar{b}$

وبالعكس نأخذ عنصر ينتمي لـ $\bar{b}$ و نثبت أنه ينتمي ل $\bar{a}$

ليكن $x \epsilon \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}x$ (حسب تعريف صف التكافؤ) إن $\mathcal{P}$ تناظرية لأنها علاقة تكافؤ ينتج أن $b\mathcal{P}a$

و $\mathcal{P}$ علاقة متعدية يصبح كما يلي

$$\begin{cases} b\mathcal{P}a \\ a\mathcal{P}x \end{cases} \Longrightarrow b\mathcal{P}x \Leftrightarrow x\mathcal{P}b$$

ومنه $x \epsilon \bar{b}$ وبالتالي $\bar{a} \subseteq \bar{b}$.

ليكن $y \epsilon \bar{b}$ عندئذ $a\mathcal{P}y$ (حسب تعريف صف التكافؤ) إن $\mathcal{P}$ تناظرية لأنها علاقة تكافؤ ينتج أن $b\mathcal{P}y$

ولدينا $a \epsilon \bar{b}$ ومنه $a\mathcal{P}b$.

أصبح لدينا $\begin{cases} a\mathcal{P}b \\ b\mathcal{P}y \end{cases} \Longleftarrow a\mathcal{P}y$ لأن $\mathcal{P}$ علاقة متعدية وبالتالي يكون $y \epsilon \bar{a}$ ومنه $\bar{b} \subseteq \bar{a}$

من الاحتوائيين $(\bar{a} \subseteq \bar{b}\ ,\bar{b} \subseteq \bar{a})$ نجد $\bar{a} = \bar{b}$.

" $\Longrightarrow$ " نفرض أن $\bar{a} = \bar{b}$ ولنبرهن أن $a \epsilon \bar{b}$ بما أن $\bar{a} = \bar{b}$

و لدينا $a \epsilon \bar{a}$ لأن $\mathcal{P}$ علاقة انعكاسية عندئذ:

$a \epsilon \bar{a} = \bar{b}$ وذلك لكون $\mathcal{P}$ علاقة انعكاسية .

٤) **نص الاستقراء** :لتكن $(P, \leq)$ مجموعة جزئية مرتبة
إن الشروط الاتية متكافئة :

٥) الشرط الأصغري : كل مجموعة جزئية وغير خالية في P تحوي عنصر أصغري .

٦) مبدأ الاستقراء : لتكن θ قضية ما

a_ إن جميع العناصر الأصغرية في P تحقق القضية θ .

b_ ولتكن $a \epsilon P$ إذا كانت جميع العناصر $x \epsilon P$ التي من أجلها $x < a$ المحققة القضية θ تؤدي الى ان العنصر a يحقق القضية θ .

عندئذ جميع عناصر المجموعة P تحقق القضية θ .

٧) شرط انقطاع السلاسل المتناقصة :

كل سلسلة متناقصة من عناصر المجموعة P على الشكل $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$

تنقطع أي يوجد دليل n يحقق : $a_n = a_{n+1} = \cdots$

أو $\forall k \geq n \,;\, a_K = a_n$

تمهيدية زورن : لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من P غير خالية ومرتبة كليا تملك حد اعلى

(ادنى) عندئذ يوجد في P عنصر اعظمي (اصغري) واحدا على الأقل .

السؤال الثاني

١) مبرهنة لاغرانج :

لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الاثبات : لنفرض ان $(G:1) = n$ ولنفرض ان $a_1H, a_2H, \ldots\ldots\ldots a_mH$: $m \leq n$

جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G ولما كانت المجموعة $M_l = \{a_iH : 1 \leq i \leq$ ة$\}$

تشكل تجزئة للزمرة G نجد ان $G = \cup_{i=1}^{m} a_iH$

$$(G:1) = \sum_{i=1}^{m} card\ a_iH$$

$$= card\ a_1H + card a_2H, \ldots\ldots\ldots + card\ a_mH$$

$$= card\ H + card\ H + \ \ldots\ldots\ldots + card\ H$$

$$= m\ card\ H$$

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

٢) لتكن $\overline{N}$ زمرة جزئية في الزمرة G/H ولنأخذ المجموعة :

$$N = \{a : a \epsilon G \quad , \quad aH \epsilon \overline{N}\}$$

واضح أن $\emptyset \neq N \subseteq G$ لأن $\underbrace{e}_{G\text{محايد الزمرة}}.H = H \epsilon \overline{N}$

ومنه $e \epsilon N$.

لنبرهن أن N زمرة جزئية في G

ليكن $x, y \epsilon N$ عندئذ:

$$x.H \ , y.H \epsilon \overline{N}$$

حيث $\overline{N}$ زمرة جزئية فإن : $(xH).(yH)^{-1} \epsilon \overline{N}$

حسب تعريف المقلوب في زمرة الخارج نجد : $(xH).(y^{-1}H) \epsilon \overline{N}$

حسب تعريف الجداء في زمرة الخارج نجد : $(x.y^{-1}).H \epsilon \overline{N}$

حيث $x.y^{-1}$ يولد مرافقة تنتمي إلى $\overline{N}$.

وهذا يبين أن $(x.y^{-1}) \epsilon N$ ومنه N زمرة جزئية في G .

ولنبرهن الآن إنها تحوي H

$$\forall\, h \epsilon H \quad \text{فإن} \quad hH = H \epsilon \overline{N}$$

وحسب تعريف N فإن $h \epsilon N$ وهذا يبين أن $H \subseteq N$.

لنبرهن الان أنها من الشكل N/H أي لنبرهن أن $\overline{N} = \mathrm{N/H}$

لدينا H زمره جزئية ناظمية في G وأن $H \subseteq N$ ومنه فإن H ناظمية في N وبالتالي فإن N/H زمرة

ليكن $\overline{x} \epsilon \overline{N}$ عندئذ حسب تعريف $\overline{N}$ فإن $\overline{x} = x.H$

حيث $x \epsilon G$ ولما كان $x.H \epsilon \overline{N}$ عندئذ وحسب تعريف N فإن $x \epsilon N$ ومنه فإن :

$$\overline{x} = x.H \epsilon N/H$$

$$\Longrightarrow \overline{N} \subseteq N/H$$

الاحتواء المعاكس :

ليكن $\bar{y} \in N/H$ عندئذ $\bar{y} = y.H$ حيث $y \in N$ ومنه حسب تعريف $\bar{N}$ فإن

$\bar{y} = y.H \in \bar{N}$ وهذا يبين أن $N/H \subseteq \bar{N}$

ومن الاحتوائين نجد :

$$\bar{N} = N/H$$

٣) لنفرض أن $(G : 1) = m.P$ حيث m عدد صحيح وحسب الاستقراء على m حيث $m \geq 1$: من أجل $m = 1$

فإن $(G:1) = P$

عندئذ $G =< a >$ دوارة فإن : $(G:1) = o(a) = P$

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية و **المحتواة تماماً** في G .

نميز حالتين :

١) توجد في G زمرة جزئية $K \neq G$ دليلها لا يقبل القسمة على P وحسب لاغرانج فإن :

$$m.P = (G:1) = (G:K)(K:1)$$

وبما أن $(G:K)$ لا تقبل القسمة على P ومنه $(K:1)$ تقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في K عنصر مرتبته P وبالتالي فإن في G عنصر مرتبته P .

٢) أدلة كل الزمر الجزئية المحتوات تماما في G تقبل القسمة على P .
لنفرض أن l هي جميع الزمر المحتواة تماما في G . ولنفرض أن H هو العنصر الأكبر في l من حيث المرتبة .

إن $H \neq G$ زمرة جزئية أعظمية (كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي) ولنفرض أن $S = (H:1)$

اذا كان S يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي G تحوي عنصر مرتبته P ويتم المطلوب .

أما اذا كان S لايقبل القسمة على P لدينا $H \subsetneqq G$ عندئذ يوجد عنصر $x \in G$ بحيث $x \notin H$ ولنفرض أن

$T =< x >$ وأن $(T:1) = t$

نلاحظ أن $H.T$ زمرة جزئية في G وأن $H \subsetneqq H.T$ ومنه $G = H.T$ (لان H أعظمية ووجدنا أكبر منها ولا تساويها فهي حتما $G = H.T$ لأنه فرضنا أن $H \subsetneqq G$)

أيضا لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية :

$$\frac{G}{H} = \frac{H.T}{H} \cong \frac{T}{H \cap T}$$

ومنه

$$\left(\frac{G}{H}:1\right)=\left(\frac{T}{H\cap T}:1\right)$$

مرتبه زمرة الخارج هو الدليل وبالتالي

$$(G:H)=(T:H\cap T)$$

حسب لاغرانج $(G:1)=(G:H)(G:1)$

$$m.p=(G:1)=(T:H\cap T)(\underbrace{H:1}_{P\text{لا تقبل القسمة على}})$$

ولما كانت مرتبة H لا تقبل القسمة على P عندئذ :

$(T:H\cap T)$ تقبل القسمة على P .

وبما فإن : $(T:1)=(T:T\cap H)(T\cap H:1)$

ولما كانت T دوارة فإن T تحوي زمرة جزئية مرتبتها P هي $<x^{\frac{t}{P}}>$ وهذه يبين أن $x^{\frac{t}{P}}\in G$

وأن مرتبتها : $O\left(x^{\frac{t}{P}}\right)=P$

٤) لنفرض أن $H=<h>:h\in H\quad,\quad K=<k>:k\in K$

ولنفرض أيضا أن $(K:1)=o(k)=m$

$$(H:1)=o(h)=n$$

أن مرتبة أي زمرة دوارة تساوي مرتبة المولد لها وبالتالي.

$$o(k)=m\quad,o(h)=n$$

وأيضا $((H\oplus K):1)=n.m$ و نريد اثبات أن :

$$\gcd(n,m)=1\iff H\oplus K\ \text{دوارة}$$

◄لزوم الشرط :

لنفرض أن $H\oplus K$ دوارة

نفرض جدلا أن $\gcd(n,m)=t>1$ وبما أن t يقسم كل من m,n فإن: $h^{\frac{n}{t}}\in H$ و مرتبته t و $k^{\frac{m}{t}}\in K$ و مرتبته t أي :

$$o\left(k^{\frac{m}{t}}\right)=t \quad , \quad o\left(h^{\frac{n}{t}}\right)=t$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة : وبما ان $\left(h^{\frac{n}{t}},e_k\right)\in H\oplus K$ و $\left(e_h,k^{\frac{m}{t}}\right)\in H\oplus K$

$$o\left(h^{\frac{n}{t}},e_k\right)=lcm\,(t,1)=t$$

$$o\left(e_h,k^{\frac{m}{t}}\right)=lcm\,(1,t)=t$$

ومنه إن كل من الزمرتين :

$$<h^{\frac{n}{t}},e_k> \quad و \quad <e_h,k^{\frac{m}{t}}> \ \epsilon\, H\oplus K$$

زمرتين جزئيتين في $H\oplus k$ وكل منها دوارة لها نفس المرتبة وهي t وهاتان الزمرتان مختلفتان .

فضلا عن ذلك :

$$<h^{\frac{n}{t}},e_k>\neq<e_h,k^{\frac{m}{t}}>$$

وهذا غير ممكن

ومنه نجد تناقض وبالتالي $\gcd(n,m)=1$.

◄كفاية الشرط :

لنفرض أن $\gcd(n,m)=1$ عندئذ :

$$(h,k)\,\epsilon\, H\oplus K$$

ومنه $(<h,k>)$ زمرة جزئية في $H\oplus K$

$o(h,k)=lcm\left(o(h).o(k)\right)=n.m$ (لأن n.m أوليان فيما بينهما)

ومنه فإن $H\oplus K=(<h,k>)$

أي أن $H\oplus K$ دوارة .

٥) لتكن G زمرة منتهية وإن $(G:1)=4$ أن G تبديلية لأن $(G:1)=2^2$

- إذا كانت G دوارة فإن $G\cong Z_4$
- لنفرض أن G ليست دوارة حسب المبرهنة السابقة فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 ولتكن K

ومنه $K \subsetneq G$ اي يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ إنK دوارة وبالتالي $K =< a > : a \in K$

ولنضع $H =< b >$ وأن H دوارة مولدة بالعنصر مرتبتها 2 أي أن $(H:1) = 2$ حيث
أن H زمرة جزئية في G فإن مرتبتها تقسم مرتبة G
ومنه $H = \{e, b\}$ $\quad$ $\mathrm{K} = \{e, a\}$

إن كل H, K ناظمية في G حسب نص سابق ((كل زمرة منتهية مرتبتها P^2 تكون تبديلية))

ومنه $H.K$ زمرة جزئية في G .

وأن $K \cap H =< e >$ لأن إذا كان $y \epsilon K \ \cap H$

ولنفرض جدلا ان $y \neq e$ وأيضا :

$$y^2 = e \ ; y \epsilon K$$
$$y^2 = e \ \ ; y \epsilon H$$

ومنه $y = y^{-1}$ ومنه فإن $o(y) = 2$: وبالتالي $y = b \in K$ وهذه تناقض ومنه

$$K \cap H =< e >$$

ونعلم أن

$$\boxed{(H.K:1) = \frac{(H:1).(K:1)}{(K \cap H:1)} \qquad \text{قانون حفظ}}$$

$$(H.K:1) = (H:1).(K:1) = 4$$

$$G = K \times H \cong K \oplus H \cong Z_2 \oplus Z_2$$

ومنه اذا كانت دوارة فهي تماثل Z_4 واذا لم تكن دوارة فهي تماثل $Z_2 \oplus Z_2$

٦) لنثبت أن المجموعة $m\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $(\mathbb{Z}, +)$ أي لنثبت أن :

$$m\mathbb{Z} = \{m.n \quad : \quad n \epsilon \mathbb{Z}\}$$

إن $\emptyset \neq m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ لأن $0 \epsilon m\mathbb{Z}$ على الأقل .

ليكن $x, y \epsilon m\mathbb{Z}$ عندئذ يوجد $\varphi, \beta \epsilon \mathrm{m}\mathbb{Z}$ بحيث :

$$x = m.a \qquad , y = mb$$

$$\Longrightarrow x - y = m.a - m.b = m(a - b)$$

$$\Longrightarrow (a - b) \epsilon \mathbb{Z} \ \ \Longrightarrow x - y \in m\mathbb{Z}$$

وبالتالي $m\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$

نلاحظ أن $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ ليست زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن العملية المعرفة عليها ليست ذات العملية المعرفة على $\mathbb{Z}$.

كما أن $\mathbb{Z}_{10}$ لا تماثل $10\mathbb{Z}$ وذلك بملاحظة ما يلي :

$$\alpha : 10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$$

لنفرض جدلاً أن $10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{10}$

$$\alpha(10) = \alpha\left(\underbrace{1+1+1+1+\cdots.+1}_{\text{10 مرات}}\right) = \underbrace{\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)+\alpha(1)++\cdots..++\alpha(1)}_{\text{10 مرات}}$$

$$= 10.\alpha(1) = 0 \Longrightarrow \alpha(10) = 0$$

ومنه نستنتج أن

$$\alpha(10) = \alpha(0)$$

وبما ان α متباين فإن $0 = 10$ وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا يوجد تماثل

السؤال الثالث

١) أوجد جميع عناصر الزمرة $(U(15),.)$.

الحل: العناصر الأولية مع الاعداد الاصغر من 15 .

$$U(n) = \{x : x \in \mathbb{N} \ ,0 < x < n \ , \quad \gcd(x,n) = 1\}$$

$$U(16) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$

$$1.1 = 1 \ , \quad 2.8 = 1 \ , \quad 4.4 = 1$$

$$7.13 = 1 \ , \quad 8.2 = 1 \quad , \quad 11.11 = 1$$

$$13.7 = 1 \quad , \ 14.14 = 1$$

وبالتالي يكون جدول المقاليب هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
a^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

$$1^1 = 1$$

$$2^1 = 2 \quad ,2^2 = 4 \ ,2^3 = 8\ ,2^4 = 1$$

$$4^1 = 4 \ \ ,4^2 = 1$$

$$7^1 = 7 \ \ ,7^2 = 4 \ \ ,7^3 = 13 \ \ ,7^4 = 1$$

$$8^1 = 8 \ \ ,8^2 = 4 \ \ ,8^3 = 2\ ,8^4 = 1 \ ,$$

$$11^1 = 11 \ \ ,11^2 = 1$$

$$13^1 = 13 \;, 13^2 = 4 \quad , 13^3 = 7 \;, 13^4 = 11$$

$$14^1 = 14 \quad , 14^2 = 1$$

وبالتالي يكون جدول مراتب العناصر هو :

a	1	2	4	7	8	11	13	14
$o(a)$	1	4	2	4	4	2	4	2

٢) نلاحظ أن المجموعة K منتهية وجزئية من $U(15)$ وإثبات أن K زمرة جزئية في $(U(15),.)$ يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall\, x, y \in K \;; x.y \in K$$

$\odot$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

$$2^0 = 1 \quad , \quad 2^1 = 2 \,, 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8 \Rightarrow H =< 2 >$$

$$4^0 = 1 \quad , \quad 4^1 = 4 \,, 4^2 = 1 \Rightarrow H \neq< 2 >$$

$$8^0 = 1 \quad , \quad 8^1 = 8 \,, 8^2 = 4, \quad 8^3 = 2 \Rightarrow H =< 8 >$$

أي أن H مولدة بـ $2,8$.

٣) $U_k(n) = \{x \;: x \in U(n) : \mathrm{x \bmod - k} = 1 \;\}$

$$U_3(15) = \{1,4,7,13\}$$

٤) عدد المرافقات حسب لاغرانج يكون :

$$(U(15): K) = \frac{(U(15): 1)}{(K: 1)} = \frac{8}{4} = 2$$

لنوجد كل المرافقات اليسارية وهي من الشكل $a.K$ بحيث $a \in U(15)$

نعلم أن $a.K = K \Leftrightarrow a \in K$ ومنه فإن :

$$K = 1.K = \{1,2,4,8\} = 2.K = 4.K = 8.K$$

ولنوجد المرافقات المتبقية :

$$7.K=\{7,14,13,11\}=11.K=13.K=14.K$$

وبذلك يكون لدينا مرافقين مختلفين وهما : K ,$7.K$.

لنوجد زمرة الخارج :

بما أن $U(15)$ زمرة تبديلية و K زمرة جزئية من $U(15)$ فإن K ناظمية في $U(15)$ وبالتالي $\frac{U(15)}{K}$ معرفة وبالتالي تكون زمرة الخارج :

$$\frac{U(15)}{K}=\{a.K\ :a\in U(15)\}=\{K,7.K\}$$

٥) الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 2 هي

$$<11>=\{1,11\},<4>=\{1,4\},<14>=\{1,14\}$$

٦) $(U(15):1)=8=2^3$

وبالتالي $U(15)$ هي $P-$ زمرة لان مرتبتها كتبت على شكل عدد اولي مرفوع لأس صحيح موجب

٧) حسب لاغرانج نجد أن

$$\left(U(15):U_3(15)\right)=\frac{\left(U(15):1\right)}{\left(U_3(15):1\right)}=\frac{8}{4}=2$$

أي أن $\left(U(15):U_3(15)\right)$ دوارة حسب مبرهنة كل زمرة مرتبتها عدد أولي تكون دوارة

٨) وجدنا أن $\left(U(15):U_3(15)\right)$ دوارة ومرتبتها ٢

ونعلم أن Z_2 دوارة بالعنصر $<1>$ مرتبتها ٢

ولإيجاد N يجد أن نأخذ زمرة دوارة مرتبتها ٢ وبذلك يتم المطلوب ولنأخذ الزمرة المولدة بالعنصر 4

$$N=<4>$$

ومنه $\left(U(15):U_3(15)\right)\cong N\cong Z_2$

انتهى حل الدورة الفصلية الأولى لعام ٢٠١٦ ☺

إعداد:- احمد أبو التوت – ولاء الاخضر