نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة: الثانية عشر عنوان المحاضرة: المتاليات والمسلسلات العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمنطقة

٢ـالمتتاليات العقدية

٣ـتقارب متتالية العقدية

المنطقة: هي مجموعة مفتوحة ومترابطة في آن واحد

أمثلة :

- كل قرص مفتوح هو منطقة **التعليل** لأن القرص المفتوح هو مجموعة مفتوحة ومترابطة
- كل نصف مستوي دون حافته هو منطقة **التعليل** لأن عندما يكون لدينا مستقيم في المستوي يقسم المستوي إلى نصفي مستوي وإذا أخذنا نصف المستوي سواء مع حافته أو دون حافته هو مجموعة مترابطة لكن مع حافته لن يكون مجموعة مفتوحة وبالتالي نصف مستوي دون حافته سيكون مفتوحتان ومترابطا ً لذلك منطقة
- أي شريط دون حافتيه هو منطقة **التعليل** تكلمنا سابقاً أنه أي شريط هو مترابط سواء مع حافتيه أو دون حافتيه لكن لن يكون الشريط مجموعة مفتوحة إن كانت إحدى حافتين يجب أن نزيل الحافتين حتى تصبح المجموعة مفتوحة

تمرين

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 \leq |z| \leq 2\}$$

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \,;\, \frac{\pi}{4} \leq Arg\, z < \frac{\pi}{3}\right\}$$

مثل هندسياً كلاً من المجموعات :

$$A\,, B, A \cap B\,, A \cup B\,, A \backslash B\,, B \backslash A$$

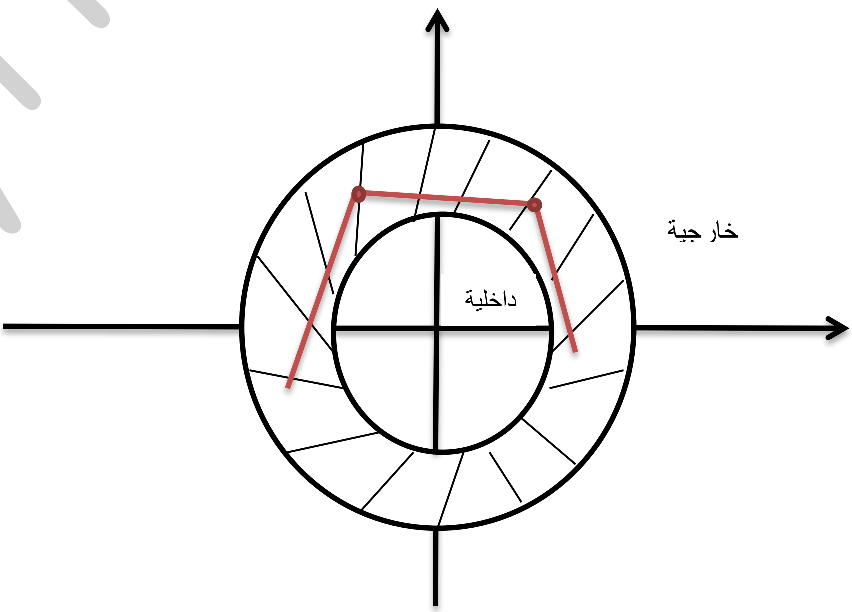
ثم صنف هذه المجموعات في جدول من الشكل (هنا ضمن السؤال لم يذكر الدكتور مع التعليل ولكن يمكن أن يـأتي مع التعليل)

الحل :

منطقة	متراصة	مترابطة	محدودة	مغلقة	مفتوحة	المجموعة
لا	نعم	نعم	نعم	نعم	لا	A
لا	لا	نعم	لا	لا	لا	B
لا	لا	نعم	نعم	لا	لا	$A \cap B$
لا	لا	نعم	لا	لا	لا	$A \cup B$
لا	لا	نعم	نعم	لا	لا	$A \backslash B$
لا	لا	لا	لا	لا	لا	$B \backslash A$

1 المجموعة A

- تمثل الحلقة المغلقة (مع المحطين) التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الداخلي 1 ونصف قطرها الخارجي 2 تعليل لأن المجموعة A $1 \leq |A|$ تعني خارج قرص واحدة مع محيط قرص الواحدة أو $2 \leq |3|$
- ليست مفتوحة تعليل لأن أي نقطة على المحيطين هي نقطة منها وليست داخلية فيها
- محدودة تعليل لأن استطعت جعلها محتواه داخل القوس $A \subseteq D(0,3)$
- مترابطة تعليل لأنه يمكن أن نصل أي نقطتين منها بخط مضلعي واقع بكامله فيها
- متراصة تعليل لأنها مغلقة ومحدودة
- ليست منطقة تعليل لأنها ليست مفتوحة

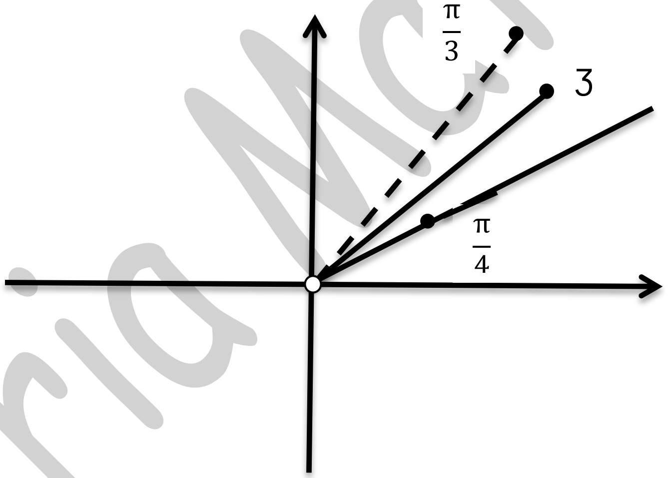


$2 \leq |3| \leq 1$ أكبر أو تساوي (١) تعني خارج قرص واحدة مع محيط

وأصغر أو تساوي (٢) تعني داخل قرص فهي تشكل حلقة مع المحيطين

٢ المجموعة B

- ليست مفتوحة تعليل نقاط الحافة مفتوحة أي نقطة نصف المستقيم $Arg3 \leq \frac{\pi}{4}$ و إذا أردنا أخذ نقطة محدودة نأخذ 1+i واقعة على مستوي العقدي وزاويته $\frac{\pi}{4}$ وهي نقطة من المجموعة B لأنها ليست داخلية
- ليست مغلقة تعليل لأن نقاط نصف المستقيم الأخر هي نقاط تجمع أي نقطة من المستقيم الذي $Arg3 = \frac{\pi}{3}$ هي نقطة تجمع لـ B ولكنها ليس من B أذا وجدنا نقطة تجمع من المجموعة وليست من المجموعة فهي ليست مغلقة
- ليست محدودة تعليل لأنها لا يمكن جعلها محتواه ضمن قرص نصف قطره محدود
- مترابطة تعليل وهي محدبة أكثر من مترابطة لأنه لا يمكن الوصل بين نقطتين فيها
- ليست متراصة تعليل لأنها ليست مغلقة ولا محدودة
- ليست منطقة تعليل لأنها ليست مفتوحة

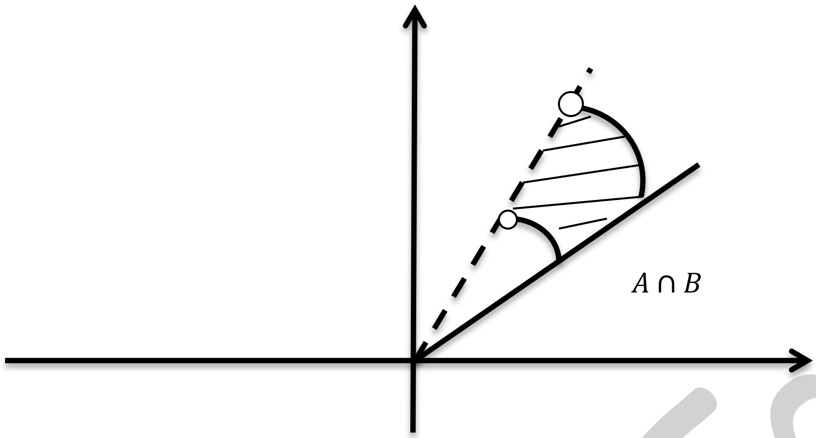


B هي القطع الزاوي الذي رأسه المبدأ وضلعاه نصفي المستقيم $Arg3 = \frac{\pi}{4}$ يعني منصف الربع الأول $Arg3 = \frac{\pi}{3}$ دون نصف المستقيم الأخر ودون المبدأ رأس القطع

٣ المجموعة $A \cap B$

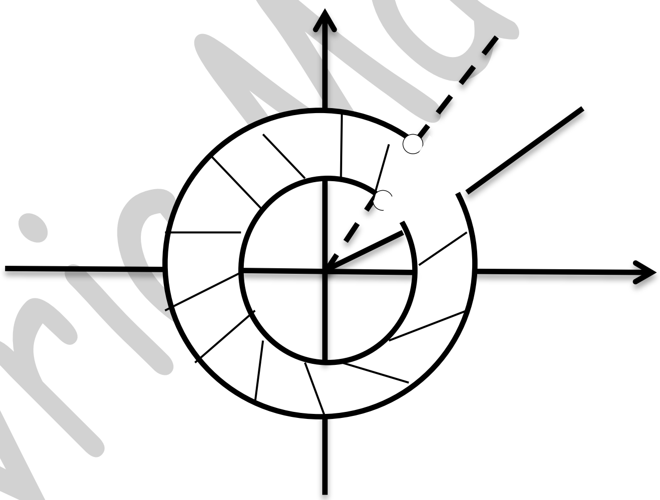
- غير مفتوحة لأن أي نقطة منها هي نقاط من تقاطع وليست داخلية
- غير مغلقة لأن أي نقطة منها عبارة عن نقاط تجمع ليست داخلية
- محدودة لأنه يمكن جعلها تمثل القرص
- مترابطة محدبة أكثر لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين

- ليست متراصة لأنها غير مغلقة
- ليست منطقة لأنها ليست مفتوحة وهي جزء من الحلقة وجزء من القطاع



٤ المجموعة $A \cup B$

- ليست مغلقة لأنها اجتماع حلقه والقطاع
- ليست مفتوحة لأن أي نقطة من القرص الذي نصف قطره ٢ لا تصلح أن تكون نقطة داخلية
- وليست محدودة
- مترابطة لأن كل من A , B مترابطة شكلاً
- وليست متراصة لأنها غير مغلقة وغير محدودة
- ليست منطقة لأنها غير مفتوحة



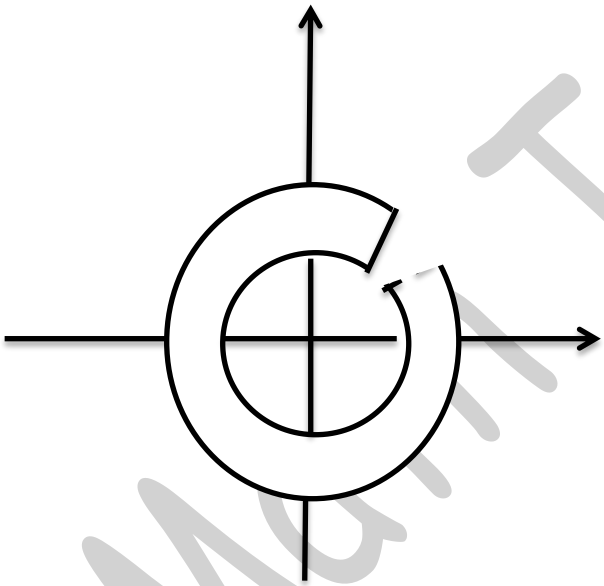
ملاحظة أن النقطة زاويتها هي $\frac{\pi}{3}$ ونصف قطرها ١

$\frac{\pi}{4}$ ونصف قطرها ٢

وهي اجتماع الحلقة مع القطاع

5 المجموعة $A\backslash B$

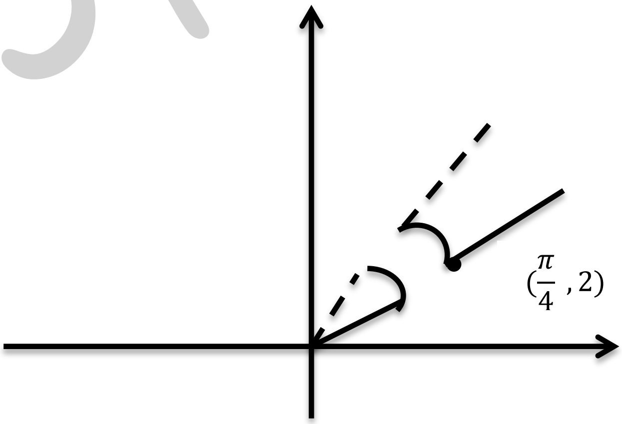
- ليست مغلقة : لأن النقطة التي زاويتها $\frac{\pi}{3}$ ونصف قطرها بين ١و ٢ لا تنتمي إلى هذه الحلقة
- ليست مفتوحة : النقط التي تقع محيط القرص ليست داخلية
- محدودة : تستطيع جعلها داخل قرص نصف قطره ٣
- ومترابطة : لكنها ليست محدبة لأنه نستطيع أن نصل بين أي نقطتين منها
- ليست متراصة : لأنها ليست مغلقة
- ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة



وهي حلقة دون القطاع

6 المجموعة $B\backslash A$

- ليست مفتوحة لأن نقاط التي على المستقيم $Arg3=\frac{\pi}{4}$ ليست داخلية
- وليست مغلقة لأن نقاط التي تقع على المستقيم $Arg3=\frac{\pi}{3}$ ليست داخلية
- ليست محدودة لأن لا نستطيع جعلها داخل قرص
- ليست مترابطة لأن لا نستطيع وصل بين نقطة من الجزء السفلي مع نقطة من الجزء العلوي
- ليست متراصة لأنها ليست مغلقة
- ليست منطقة لأنها ليست مفتوحة



هي القطاع B دون الأقواس

سنبدأ بالفصل الثاني ......

المتتاليات والمتسلسلات العقدية

تعريف : نسمي المتتالية عقدية كل تابع منطلقة $N \cup \{0\}$ أو مجموعة جزئية منها ومستقره $\mathbb{C}$ أي

$$\mathfrak{z}: A \subseteq N \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$n \to \mathfrak{z}(n) = \mathfrak{z}_n$$

ويرمز لهذه المتتالية $\{\mathfrak{z}_n\}$ ويسمى $\mathfrak{z}_n$ بالحد العام أو الحد النوني للمتتالية

كما تسمى $\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots.\}$ بحدود المتتالية

تسمى A مجموعة أدلة المتتالية

أذا كانت A منتهيه فنسمي المتتالية $\{\mathfrak{z}_n\}$ متتالية منتهيه وألا نسميها متتالية غير منتهيه أو اختصار المتتالية

مجموع قيم متتالية $\mathfrak{z}_n$ هي المجموعة $\{\mathfrak{z}_n \,;\, n \in A\}$

ملاحظة : هنالك فرق بين مجموعة والمتتالية حيث المجموعة تعطي قيم المتتالية ولا يسمح بالتكرار

أما المتتالية تسمح بالتكرار الحد

مثال : $\{i^n\}$

هي متتالية $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i\,, \dots.$

أما مجموعة قيم هذه المتتالية هي $\{1, i, -1, -i\}$

متتاليات الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية لمتتالية عقدية

لتكن $\{\mathfrak{z}_n\}$ متتالية عقدية عندئذ نجد $\forall n \;;\; \mathfrak{z}_n \in \mathbb{C}$ هذا يعني:

$$\mathfrak{z}_n = x_n + i\, y_n$$

نسمي المتتالية $\{x_n\}$ متتالية الأجزاء الحقيقية لـ $\{\mathfrak{z}_n\}$

نسمي المتتالية $\{y_n\}$ متتالية الأجزاء التخيلية لـ $\{z_n\}$

(نقول عن x_n, y_n أنها متتالية لأن كل من تغيرت n تتغير قيمة z_n)

متى نقول عن متتالية عقدية أنها محدودة ؟

نقول عن متتالية عقدية $\{z_n\}$ أنها محدودة إذا وفقط إذا وجد عدد $0 < M$ بحيث $|z_n| < M$ وهذا يعني هندسياً أن المتتالية المحدودة تعني أنه يمكن جعل جميع حدودها محتواه في قرص نصف قطره محدود

مثال:

$$\left\{ z_n : n + i\frac{1}{n} \right\}$$

ليست محدودة لأن (برهان)

طريقة الأولى :

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{n^2 + i(\frac{1}{n})^2} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n}} \longrightarrow \infty$$

وهذه المتتالية تسعى إلى ∞ وهذا يؤدي إلى أن طويلة $|z_n|$ ليست محدودة

$\Leftarrow$ $|z_n|$ليست محدودة

طريقة ثانية : إذا استطعنا إثبات أنه لا يمكن جعلها ضمن قرص

مبرهنة :

تكون متتالية عقدية $\{z_n\}$ محدودة إذا وفقط إذا كان متتاليتا الأجزاء الحقيقي والأجزاء التخيلية لها محددتين

$$\{z_n\}\text{محدودة} \Leftrightarrow \{Re z_n\}\{Im z_n\}\text{محدودتان}$$

الاثبات :

$$|Re z| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

الجزء الحقيقي لعدد عقدي بالقيمة المطلقة أصغر أو يساوي طويلة z

$$|Re z|^2 \leq (Re z)^2 + (Im z)^2 = |z|^2$$

$$|Re3| \leq |3|$$

وهي صحيحة لأجل الجزء الحقيقي والتخيلي

$[\Leftarrow]$

بفرض $\{3_n\}$ محدودة يوجد عدد $0 < M$ بحيث يكون $|3_n| < M\ ,\forall n$

$$\Rightarrow |Re3| \leq |3_n| < M\ ,\forall n$$

وهذا يؤدي إلى $|Re3|$ محدودة

$$\Rightarrow |Im3| \leq |3_n| < M\ ,\forall n$$

وهذا يؤدي إلى $|Im3|$ محدودة

$[\Rightarrow]$

$\{Re3_n\}\{\mathrm{Im}3_n\}$محدودتان $\Leftarrow$ $\exists\, m_1 > 0 :\ |Re3_n| < M_1\ ,\forall n$

$$\exists\, m_2 > 0 :\ |Im3_n| < M_2\ ,\forall n$$

ونحنا نريد إثبات وجود عدد ليكن M بحيث $|3_n| < M$

$$\Rightarrow \exists M = M_1 + M_2$$

$$|3_n| = |Re3_n + i\ Im3_n| \leq\ |Re3_n| + |Im3_n| < M_1 + M_2 = M\ \ \forall n$$

وهذه يعني أن $\{3_n\}$ محدودة

مثال : $\{i^n\}$

متتالية محدودة لان طويلتها ١ ونأخذ أي عدد أكبر من ١

$1 < 2$ إذاً $|i^n|$ محدودة

تقارب متتالية عقدية

نقول عن متتالية عقدية $\{3_n\}$ إنها متقاربة من عدد عقدي a إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$* \quad \forall \varepsilon > 0 \,, \exists N_{\varepsilon} > 0 \,;\, \forall n \geq N \Longrightarrow |3_n - a| < \varepsilon$$

وهذا يعني هندسياً أن أي جوار لـ a سيحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها بدلالة على أنه 3_n متقاربة $\lim 3_n = a$ أو $3_n \underset{\text{تسعى}}{\longrightarrow} a$

- نقول عن متتالية عقدية 3_n إنها متباعدة إذا لم يوجد عدد عقدي a بحيث تكون $\lim_{n\to\infty} 3_n = a$ محققة أي بحيث تكون * محققه
- نقول عن متتالية عقدية 3_n إنها تسعى إلى ∞ إذا وفقط إذا سعت المتتالية $|3_n|$ إلى $+\infty$

مثال :

$\left\{3_n : n + i\frac{1}{n}\right\}$ تسعى إلى ∞

لأن $\sqrt{\frac{n^4+1}{n^2}} = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} = |3_n|$:درجة البسط أكبر من درجة إلى مقام وبالتالي تسعى إلى ∞

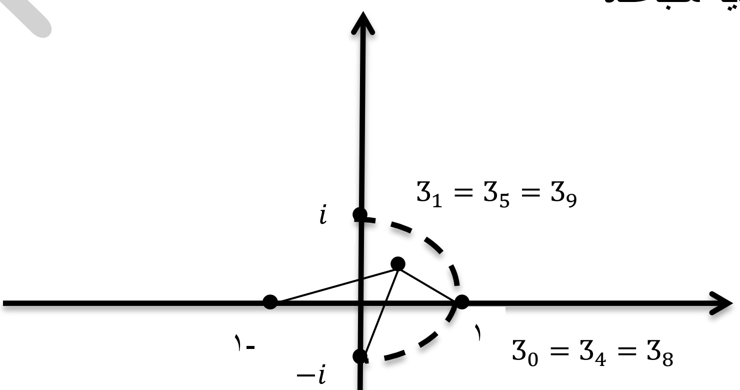
المتتالية $\left\{\frac{1}{n} + i\,\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة إلى الصفر لأن $|3_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \,, \exists N_{\varepsilon} > 0 \,;\, \forall n \geq N_{\varepsilon} \Longrightarrow |3_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |3_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow 3_n = \frac{1}{n} + i\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

<u>مثال</u> $\{i^n\}$ متتالية عقدية متباعدة



وهي متباعدة لأن أي عدد عقدي لا يمكن أن يكون نهاية لها

$a \in \mathbb{C}$ نميز حالتين :

- الحالة الأولى

$a \in \{1, -i, -1, i\}$ لا يمكن لـ a تكون نهاية متتالية عندئذ يوجد قرص $D(a, \frac{\sqrt{2}}{3})$

أي أن جوار لـ a سيكون خارجة عدد منتهي من حدود متتالية i^n إلا a المتتالية $\{i^n\}$ وهذا يعني أنه لا يمكن لـ a أن تكون نهاية لـ $\{i^n\}$

- الحالة الثانية

$a \notin \{1, -i, -1, i\}$ هنا نأخذ بعد a عن نقاط

$$|a-1|, |a+1|, |a+i|, |a-i|$$

$$\delta = min \frac{(|a-1|, |a+1|, |a+i|, |a-i|)}{2}$$

الجوار $D(a, \delta)$ لـ a لأن أي حد من حدود المتتالية وهذا يعني أنه لا يمكن أن aتنتمي لـ $|i^n|$ وهذا يعني عدم وجود نهاية

ملاحظة: نلاحظ أن المتتالية $\{i^n\}$ لا تسعى إلى ∞

لأن نهاية $\{i^n\}$ تساوي الواحد وبالتالي تباعد المتتالية سيكون سبب أمرين إما النهاية غير موجودة أو النهاية تسعى إلى ∞

انتهت المحاضرة

إعداد: ميار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما