المحاضرة السادسة — الأربعاء ٨ محرم ١٤٣٩ هـ
١٨ تشرين (١) ٢٠١٧م

امثلة

{1} R هي ID و $S=R\setminus\{0\}$ عندئذ $S^{-1}R = Quot(R)$

{2} لتكن $S \subseteq R$ و $0 \neq f \in R$

$S = \{f^n \; ; n \in N\}$ مغلقة ضربياً

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \in S \\ f^{n_1}, f^{n_2} \in S \Rightarrow f^{n_1} \cdot f^{n_2} = f^{n_1+n_2} \end{array}}$$

$Quot(R)$ هو حقل القسمة $R/R_{\neq \phi}$

$$S^{-1}R = R_f = \{ r/f^n \; ; r \in R, n \in N \}$$

كمثال $R = Z$ p عدد أولي في R

$Z_p = \{ r/p^n \; ; r \in \quad n \in N \}$

{3} $P \in spec(R)$ مثالي أولي في R و $S = R \setminus P$

S مغلقة ضربياً في $R \Leftrightarrow P \in spec(R)$

البرهان: للنفي

$\boxed{\Leftarrow}$ لنفرض أن $x, y \in R$ و $x.y \in P$

نفرض جدلاً أن $x \notin P \vee y \notin P$

$\Rightarrow x, y \in S \Rightarrow x.y \in S$

وهذا غير ممكن لأن $x.y \in P$ و $S = R \setminus P$

عندئذ الفرض الجدلي خاطئ و $x \in P \wedge y \in P$

$1 \in S$ عادلة مغلقة ضربياً

$\boxed{\Rightarrow}$ لنفرض أن $x, y \in S$ و $x.y \in P$ عندئذ $x \in P \vee y \in P$

وهذا غير ممكن وذلك لان $x, y \in R/P$

$$S^{-1}R = R_P = \left\{ \frac{r}{s} ; r, s \in R \quad s \notin P \right\}$$

مثال:

$$P = \langle 2 \rangle , \quad R = \mathbb{Z}$$

$$R_P = \mathbb{Z}_{\langle 2 \rangle} = \left\{ \frac{r}{s} ; r, s \in \mathbb{Z} \quad 2 \nmid s \right\}$$

تمارين:

* بين فيما اذا كانت R تمثل ID فان
$$S^{-1}R \neq Quot(R) \neq Quot(R_P)$$
حيث P مثالي اولي.

* $$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \cap \mathbb{Z}_p \neq \mathbb{Z}$$
عدد اولي — مثالي اولي

نتيجة (١٢) اذا كانت R حلقة واحدية تبديلية و $0 \neq S \subseteq R$ ولتكن $P \in Spec(R)$ حيث $S = R/P$ عندئذ (R, M) حلقة محلية حيث

$$M = P^e = PR_P = \left\{ \frac{a}{b} \quad a \in P \quad b \notin P \right\}$$
$b \in S$

حتى تكون (R, M) حلقة محلية يجب ان يكون M مثالي اعظمي

لكن لنبرهن أولاً $R_P \neq M = U(R_P)$

$$\forall \frac{a}{b} \in R_P / M \qquad a, b \in R$$

بما ان $\frac{a}{b} \in R_P / M$ فان

$$a \notin P \qquad b \notin P \quad ; \quad b \in S = R/P$$

Galaxy

٤٤

$\Rightarrow \frac{b}{a} \in R_p \Rightarrow \frac{a}{b} \in U(R_p)$

$\Rightarrow R_p / y \subseteq U(R_p)$

لنبرهن الاحتواء الثاني

$\forall \frac{r}{s} \in U(R_p) \quad \exists \frac{a}{b} \in R_p$

$; \frac{1}{1} = \frac{r}{s} \cdot \frac{a}{b}$

$\exists u \in S \quad ; ura = usb \in S$

$\Rightarrow r \notin P \Rightarrow \frac{r}{s} \in R_p / y$

$\Rightarrow U(R_p) \subseteq R_p / y$

مما سبق نجد ان $U(R_p) = R_p / y$

لنبرهن ان y مثالي أعظمي

لنفرض ان $y' \lhd R_p$ مثالي اعظمي

ولنفرض جدلاً أن $y \neq y'$

$a \in y' \Rightarrow a \notin y \Rightarrow a \in R_p / y = U(R_p)$

$\Rightarrow a \in U(R_p)$

$\Rightarrow y' = R_p$

وهذا تناقض عندئذ الفرض الجدلي خاطئ

$\Rightarrow y = y'$

التموضع عند المودولات

ليكن M هو R-module ، $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً في R .

نعرف علاقة على الجداء $S \times M$

$$(s_1, m_1) \sim (s_2, m_2) \quad \exists\, u \in S \; ; \; u(s_1 m_2 - m_1 s_2) = 0$$

بالتحقق نجد أن العلاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية

عندئذ العلاقة تكافؤ.

نعرف صفوف التكافؤ

$$S^{-1}M = S \times M / \sim$$

$$\frac{m_1}{s_1} , \frac{m_2}{s_2} \in S^{-1}M$$

قانون داخلي $\quad \dfrac{m_1}{s_1} + \dfrac{m_2}{s_2} = \dfrac{m_1 s_2 + m_2 s_1}{s_1 s_2}$

قانون خارجي $\quad \dfrac{r}{s} \cdot \dfrac{m_1}{s_1} = \dfrac{r \cdot m_1}{s s_1} \; ; \; \dfrac{r}{s} \in S^{-1}R$

عندئذ $S^{-1}M$ هو مودول.

$$\varphi \in Hom(M, N) \qquad S^{-1}\varphi : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\frac{m}{s} \longrightarrow \frac{\varphi(m)}{s}$$

$$\psi \in Hom(N, P) \qquad \varphi \in Hom(M, N)$$

$$\psi : N \longrightarrow P \qquad \varphi : M \longrightarrow N$$

$$S^{-1}(\psi \circ \varphi) : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}P \qquad (S^{-1}(\psi \circ \varphi)) = S^{-1}\psi \circ S^{-1}\varphi$$

/ /

إذا كانت $0 \neq f \in R$ ـ $S = \{f^n ; n \in N\}$

$$S^{-1}M = M_f = \left\{ \frac{m}{f^n} ; m \in M ; n \in N \right\}$$

$$S^{-1}\varphi : M_p \longrightarrow N_p \quad ; S = R/p$$

ملاحظة: إن التوضيع يحافظ على المتتالية التامة

نتيجة (ع) لتكن $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً ولتكن I متتالية تامة

$$I, \quad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M'' \longrightarrow 0$$

عندئذ II متتالية تامة

$$II \quad 0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M'' \longrightarrow 0$$

علينا اثبات

$$Im\, S^{-1}\psi = \ker S^{-1}\varphi$$

$$\forall \frac{m}{s} \in Im\, S^{-1}\psi \quad \exists \frac{m'}{s'} \in S^{-1}M'$$

$$S^{-1}\psi\left(\frac{m'}{s'}\right) = \frac{\psi(m')}{s'} = \frac{m}{s}$$

$$\exists u \in S \qquad u(s\,\psi(m')) = u m s'$$

وبما أن ψ تشاكل مودولي فإن

$$\psi(u s m') = u s' m \in Im\, \psi$$

وبما أن I تامة فإن $Im\, \psi = \ker \varphi$

$$\Rightarrow u s' m \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(u s' m) = 0$$

Galaxy

$$\boxed{s' u\, \varphi(m) = 0}$$ وبما ان φ متتالية تامة

من جهة أخرى

$$s^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\varphi(m)}{s} = \frac{us'\varphi(m)}{us's} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{s} \in \ker\varphi \Rightarrow \operatorname{Im} s^{-1}\varphi \subseteq \ker s^{-1}\varphi$$

اثبات الاحتواء الاول طريقة ثانية

$$s^{-1}\varphi \circ s^{-1}\psi = s^{-1}(\varphi\circ\psi)$$
$$= s^{-1}0 = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} s^{-1}\psi \subseteq \ker s^{-1}\varphi$$

لنثبت الاحتواء الثاني:

$$\forall\ \frac{m}{s} \in \ker s^{-1}\varphi$$

$$s^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) = 0 = \frac{\varphi(m)}{s}$$

$$\exists u \in S \quad 0 = u\varphi(m) = \varphi(um)$$

$$\Rightarrow um \in \ker\varphi = \operatorname{Im}\psi$$

$$\exists\ m' \in M' \quad \psi(m') = um.$$

$$\Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{um}{us} = \frac{\psi(m')}{us} = \psi\left(\frac{m'}{us}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{s} \in \operatorname{Im} s^{-1}\psi$$

$$\Rightarrow \ker s^{-1}\varphi \subseteq \operatorname{Im} s^{-1}\psi$$

$$\Rightarrow \ker s^{-1}\varphi = \operatorname{Im} s^{-1}\psi$$ $\Rightarrow$ متتالية تامة II

انتهت المحاضرة السادسة

المحاضرة السابعة — الاثنين ٣ صفر ١٤٣٩هـ
٢٣ تشرين (١) ٢٠١٧م

مبرهنة (١٥) لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً في R وليكن M هو R-module و $N, N' \leq M$ و $\varphi \in Hom(M, M')$ إن العلاقات التالية صحيحة.

١) $S^{-1}(N+N') = S^{-1}N + S^{-1}N'$

٢) $S^{-1}(N \cap N') = S^{-1}N \cap S^{-1}N'$

٣) $S^{-1}\left(M/N\right) = S^{-1}M / S^{-1}N$

٤) $\ker S^{-1}\varphi = S^{-1} \ker \varphi$

$\operatorname{Coker} S^{-1}\varphi = S^{-1} \operatorname{Coker} \varphi$

١ـ $\forall \frac{n}{s} \in S^{-1}(N+N')$

$; n \in N+N'$

$s \in S = R/p$

$\exists n_1 \in N \quad n_2 \in N'$

$n = n_1 + n_2 \Rightarrow \frac{n}{s} = \frac{n_1+n_2}{s}$

$= \frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s} \in S^{-1}N + S^{-1}N'$

$\Rightarrow S^{-1}(N+N') \subseteq S^{-1}N + S^{-1}N'$

$\forall \frac{n}{s} \in S^{-1}N + S^{-1}N'$

$\exists \frac{n_1}{s_1} \in S^{-1}N \quad \frac{n_2}{s_2} \in S^{-1}N'$

$$\frac{n}{s} = \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_1 s_2 + s_1 n_2}{s_1 s_2}$$

$$\in S^{-1}(N+N')$$

$$\Rightarrow (S^{-1}N + S^{-1}N') \subseteq S^{-1}(N+N')$$

$$\Rightarrow S^{-1}(N+N') = S^{-1}N + S^{-1}N'$$

$\boxed{2}$ $\forall \frac{n}{s} \in S^{-1}(N \cap N')$ $\quad n \in N \cap N'$

$s \in S = R/p$

$$\Leftrightarrow n \in N \quad n \in N'$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{s} \in S^{-1}N \quad \frac{n}{s} \in S^{-1}N'$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{s} \in S^{-1}N \cap S^{-1}N'$$

$$\Rightarrow S^{-1}(N \cap N') = S^{-1}N \cap S^{-1}N'$$

$\boxed{3}$ لتكن $0 \to N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \to 0$ تامة

ان التوضيع يحافظ على الاتمام عندئذ

$0 \to S^{-1}N \to S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}(M/N) \longrightarrow 0$ تامة

وحسب التباين القانوني والاحتواء القانوني إن

$0 \to S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N} \longrightarrow 0$ تامة

ومنه حسب special snak's lemma نجد أن

$$S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \longrightarrow \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$$

٤) لتكن $0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{j} \operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow 0$ ★

متتالية تامة بالموضوع

$$0 \longrightarrow s^{-1}\ker\varphi \xrightarrow{s^{-1}i} s^{-1}M \xrightarrow{s^{-1}\varphi} s^{-1}M' \xrightarrow{s^{-1}j} s^{-1}\operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow 0 \quad \#$$

عا أن # متتالية تامة فإن $\ker s^{-1}\varphi = \operatorname{Im} s^{-1}i$

ومن ★ $M = \operatorname{Im} i = \ker\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{Im} s^{-1}i = s^{-1}\ker\varphi$

$\Rightarrow \ker s^{-1}\varphi = s^{-1}\ker\varphi$

عا أن # تامة فإن $\operatorname{Im} s^{-1}\varphi = \ker s^{-1}j$

$= s^{-1}\ker j$

$= s^{-1}\operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{Im} s^{-1}\varphi = s^{-1}\operatorname{Im}\varphi$

$; \operatorname{Coker} s^{-1}\varphi = \dfrac{s^{-1}M'}{\operatorname{Im} s^{-1}\varphi} = \dfrac{s^{-1}M'}{s^{-1}\operatorname{Im}\varphi} = s^{-1}\left(\dfrac{M'}{\operatorname{Im}\varphi}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{Coker} s^{-1}\varphi = s^{-1}\operatorname{Coker}\varphi$

ملاحظة دبات:

ناقش صحة $s^{-1}(N \cap N') = s^{-1}N \cap s^{-1}N$ من أجل التقاطع المنتهي.

أنه من أجل التقاطع المنتهي القول صحيح أما إذا كان

التقاطع غير منتهي فإنه غير صحيح بالضرورة.

مثال معاكس للملاحظة السابقة:

ليكن $M = \mathbb{Z}$ مودول , $p \in \mathbb{Z}$ أولي

ولتكن $\mathbb{Z}_p = s^{-1}M = \mathbb{Q}$ $\quad N = \langle p \rangle \leq M$

/ /

ان $\bigcap_p N = \langle 0 \rangle$

$\Rightarrow S^{-1}(\bigcap N) = S^{-1}\langle 0 \rangle = \{0\}$

وهذا تناقض اي ان $Z_p \neq \phi \ 0$

نتيجة (١٦) إن اي تموضع يحافظ على الخاصية الصفرية (الصفر خاصية محلية)

اذا كان M هو R-module فان العلاقات التالية متكافئة

$\boxed{1}$ $M = \{0\}$ $\boxed{2}$ $M_p = \{0\}$ $\forall p \in spec(R)$

$\boxed{3}$ $M_\gamma = \{0\}$ $\forall \gamma \triangleleft R$.

(١ ⇐ ٢) إن $M = \{0\}$

نفرض جدلاً ان

$M_p = S^{-1}M \neq \{0\}$

$\exists \ \frac{m}{s} \in S^{-1}M$

$; m/s \neq 0 \ ; m \in M$

$s \in S$

$\Rightarrow m \neq 0$

وهذا تناقض كونه $M = \{0\}$

عندئذ الفرض الجدلي خاطئ

وعليه $M_p = \{0\}$

نقول عن خاصية ما B انها خاصية محليه اذا

M تحقق B اذا وفقط اذا

$\forall p \in spec(R)$

M_p تحقق B

(٢ ⇐ ٣) إن كل مثالي اعظمي في حلقة تبديلية أولي

(٣ ⇐ ١) نفرض جدلاً $M \neq \{0\}$ عندئذ $\exists m \in M$

$; m \neq 0$

$ann_R(M) = \{r \in R \ ; r.m = 0\} \ntrianglelefteq R$

$\exists \eta \lhd R \; ; \; ann_R(M) \subseteq \eta$

$$S = R/\eta \subseteq R/ann_R(M)$$

$\forall u \in S \qquad u.m \neq 0 \Rightarrow u \in ann_R(M)$

$\qquad \Rightarrow u \in R/ann_R(M)$

$\Rightarrow 0 \neq \frac{m}{1} \in M_\eta = S^{-1}M \Rightarrow M_\eta \neq \{0\}$

وهذا تناقض عندئذٍ الفرض الأولي خاطئ

و $M = \{0\}$.

نتيجة (١٧) اذا كان $\varphi \in Hom(M,N)$ فإن القضايا التالية متكافئة

١- φ متباين

2- φ_p متباين $\forall p \in Spec(R)$

3- φ_η متباين $\eta \in \eta\text{-}Spec(R)$

$Ker\, S^{-1}\varphi = Ker\, \varphi_p = \{0\} \Leftrightarrow$ φ_p , φ_η متباين

$S^{-1} Ker\, \varphi = \{0\} \Leftrightarrow$

$Ker\, \varphi = \{0\} \Leftrightarrow$

φ متباين $\Leftrightarrow$

نتيجة (١٨) اذا كان $\varphi \in Hom(M,N)$ فإن القضايا التالية متكافئة.

١- φ غامر.

٢- φ_p غامر $\forall p \in Spec(R)$

٣- φ_η غامر $\forall \eta \in \eta\text{-}Spec(R)$

φ, φ_p غامر $\Longleftrightarrow$ $\text{Coker}\,\varphi_p = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $\text{Coker}\, s^{-1}\varphi = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $s^{-1}\text{Coker}\,\varphi = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $\text{Coker}\,\varphi = \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ φ غامر .

ملاحظة : ان التباين والغمر صفة محلية موضعية .

انتهت المحاضرة السابعة .

الصعب في الدنيا ان تخسر الاشخاص حولك
من اجل كسب شخص واحد
والأشد قسوة ان يتركك هذا الشخص
وتتذكر انك تركت الكل لاجله