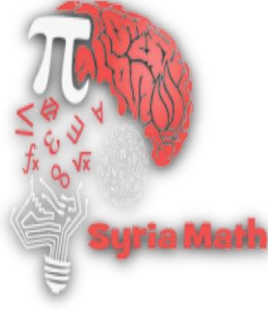


16-12-2017

نظري



◀ دكتور المادّة: جمال مللي

◀ المحاضرة: السابعة عشر و الثامنة عشر

عنوان المحاضرة: تمهيدية التراكيب الخطية

المتمنى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

ليس كل شيء في فضاءات منظمة منتهية الأبعاد يمكن أن يصح في فضاءات غير منتهية الأبعاد .
سنقتصر دراستنا على فضاءات منظمة منتهية الأبعاد .

تمهيدية التراكيب الخطية

ليكن لدينا X فضاء منظم ، ولتكن المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ جملة من الأشعة (المنتهية) المستقلة خطياً "بغض النظر عن بعد الفضاء X "
بالتالي هذه المجموعة تولد فضاء جزئي منتهي الأبعاد كل عنصر منه يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة هذه المجموعة
عندئذ يوجد c بحيث

$$(*) \quad \|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

بحيث أيّاً كانت الأعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

وإن c غير مرتبط بالعنصر المُولد من هذه الجملة

البرهان :

- لنفرض أن $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| = S$ واضح تماماً إذا كان $S = 0$ فإن كلاً من $\alpha_i = 0$ ذلك أيّاً كان $i = 1, 2, \dots, n$ بالتالي (*) محققة أيّاً كان c .
- بفرض أن $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = S \neq 0$

$$\text{إذا فرضنا أن } \beta_i = \frac{\alpha_i}{S} \text{ فإن } \sum_{i=1}^n |\beta_i| = \sum_{i=1}^n \frac{|\alpha_i|}{S} = 1$$

إذا قسمنا طرفي (*) على S وبما أنه $S > 0$ يمكننا إدخاله للنظيم ويكافئ لدينا

$$\left\| \frac{\alpha_1}{s} x_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{s} x_n \right\| \geq c \sum_{i=1}^n \frac{|\alpha_i|}{s}$$

$$\left\| \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \right\| \geq c \sum_{i=1}^n |\beta_i|$$

$$(**).. \left\| \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \right\| \geq c$$

يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكون $(**)$ محققة ، لنفرض مؤقتاً أن $(**)$ غير صحيحة أي أن

$$\forall c ; \left\| \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n \right\| < c$$

هذا يقتضي وجود متتالية من العناصر y_m بحيث

$$y_m = \left\| \beta_1^m x_1 + \dots + \beta_n^m x_n \right\| < c ; \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1 \right)$$

$$\left\| y_m \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

◀ لماذا المتتالية y_m موجودة ؟ (على الأقل ممكن أن تكون المتتالية ثابتة هي المتتالية المروجة)
بالتالي مهما تكن c يوجد متتالية y_m بحيث

$$\left\| y_m \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ و } \left\| y_m \right\| = \left\| \beta_1^m x_1, \dots, \beta_n^m x_n \right\| < c$$

نختار $c = 1/m$ من أجل كل m نجد عنصراً مناسباً أي :

$$\text{من أجل } m = 1 \text{ يوجد } \beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \dots + \beta_n^1 x_n$$

$$\text{من أجل } m = 2 \text{ يوجد } \beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \dots + \beta_n^2 x_n$$

$$\text{وبالتالي وجدت متتالية بحيث } 0 \leq \left\| y_m \right\| < c = \frac{1}{m}$$

$$\text{عندما } m \rightarrow \infty \text{ فإن } c \rightarrow 0 \text{ ومنه } \left\| y_m \right\| \rightarrow 0$$

وهو المطلوب .

◀ إن $\sum_{i=1}^n |\beta_i^m| = 1$ ومنه $|\beta_i^m| \leq 1$ أي كانت m وأياً كانت i

$$y_1 = \beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \dots + \beta_i^1 x_i + \dots + \beta_n^1 x_n$$

$$y_2 = \beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \dots + \beta_i^2 x_i + \dots + \beta_n^2 x_n$$

.

.

$$y_m = \beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \dots + \beta_i^m x_i + \dots + \beta_n^m x_n$$

.

.

لدى تثبيت i (أي عند النظر لمتتالية الأعمدة من أجل الأعداد (β_i^m))

أي أن $(\beta_i^m) = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \beta_i^{(3)}, \dots, \beta_i^{(m)}, \dots)$ المتتالية هنا لعددية من \mathbb{R}

كل عنصر من عناصرها يحقق المحدودية وبالتالي المتتالية محدودة حسب مبرهنة (بولزانو فيرستراس) (كل متتالية محدودة تحوي متتالية جزئية متقاربة)

مبرهنة بولزانو فيرستراس تنص

على أن كل مجموعة غير فارغة من \mathbb{R} محدودة وغير منتهية تملك نقطة جمع واحدة على الأقل .

بتطبيق هذه المبرهنة على المتتاليات :

بالتالي المتتالية لدينا هنا محدودة وغير منتهية من العناصر فهي تملك نقطة وتجمع واحدة على الأقل

في كل متتالية عمود يتحقق هذا الشرط وبالتالي تملك نقطة تجمع يقابلها متتالية جزئية تتقارب إلى هذه النقطة أي لكل عمود هناك متتالية جزئية متقاربة من نقطة ما .

هدفنا الحصول على متتالية جزئية من y_m تكون متقاربة :

المتتالية في العمود الأول $(\beta_1^m) = (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_1^{(3)}, \dots, \beta_1^{(m)}, \dots)$ حسب مبرهنة بولزانو فيرستراس تحوي متتالية جزئية متقاربة وليكن β_1 نهاية هذه الجزئية

نأخذ العناصر المقابلة لهذه المتتالية الجزئية المتقاربة مع مقابلاتها في العمود الثاني بالتالي تتشكل متتالية من العمود الثاني محدودة وغير منتهية وبالتالي تملك جزئية متقاربة بفرض أن β_2 نهاية هذه الجزئية. المتتالية في العمود الثاني إذا اخذنا ما يقابلها من المتتالية في العمود الأول ستكون المتتالية الجزئية من متتالية متقاربة فهي متقاربة .

نأخذ العناصر المقابلة للمتتالية الجزئية في العمود الثاني مع ما يقابلها في العمود الثالث سنتشكل متتالية محدودة غير منتهية حسب مبرهنة فيرستراس تملك جزئية متقاربة

نتابع هذا العمل حتى العمود n وبأخذ ما يقابلها مع المتتاليات الأعمدة من العمود الأول حتى $n - 1$ هي متتالية جزئية من متقاربة فهي متقاربة .

بالتالي يتشكل لدينا متتالية جزئية متقاربة من y_m لنرمز لها بـ y'_m بحيث أن كل عمود يتقارب من

$$\beta_i^{(m)} \rightarrow \beta_i$$

أي $y'_m = \beta_1^{(m)} x_1, \beta_2^{(m)} x_2 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n \rightarrow y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$ حيث $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$ وهذا يعني أنه لا يمكن أن تكون الأعداد β_i أصفار كلها بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ مستقلة خطياً فإن $y \neq 0$ ومن جهة أخرى $y'_m \rightarrow y$

يفتضي أن $\|y'_m\| \rightarrow \|y\|$ (استناداً إلى استمرار النظيم ولما كان $\|y_m\| \rightarrow 0$ فرضاً و y'_m جزئية من y_m فلا بد أن يكون $\|y'_m\| \rightarrow 0$)

هذا يقتضي $\|y\| = 0$ ولكن هذا يناقض كون $y \neq 0$ وبالتالي قد أثبتنا صحة التمهيدية

-مبرهنة التمام:

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً وبوجه خاص فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام .

-البرهان:

حتى يكون الفضاء Y تاماً يجب أن يكون كل متتالية كوشي فيه متقاربة لتكن لدينا (y_m) متتالية ما لكوشي في Y ولنثبت تقاربها في Y ولنرمز لنهايتها بـ (y) ولنفرض أن $\dim y = n$ أي أن الفضاء Y مؤلف بالقاعدة $\{e_1, \dots, e_n\}$ وبالتالي كل عنصر من (y_m) من الفضاء الجزئي Y سيكتب على شكل تركيب خطي وبشكل وحيد كالتالي :

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

$$y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m)} e_i$$

ولما كانت (y_m) متتالية كوشي فإنها تحقق ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*; m, r \geq N; \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^m - \alpha_i^r) e_i \right\| < \varepsilon$$

وحسب تمهيدية التراكم الخطية يكون لدينا :

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^m - \alpha_i^r) e_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i^m - \alpha_i^r|$$

وبالقسمة على c (ثابت موجب) فإننا نجد من أجل كل i :

$$|\alpha_i^m - \alpha_i^r| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^m - \alpha_i^r| < \frac{\varepsilon}{c}$$

(حيث إن مجموع مقادير موجبة أصغر من $\frac{\varepsilon}{c}$ فإن كل من هذه المقادير سيكون حتماً أصغر أو يساوي $\frac{\varepsilon}{c}$ أي أنه تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*; m, r \geq N; |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

أي أن α_i^m متتاليات كوشية في فضاءات تامة \mathbb{R} و \mathbb{C} متقاربة من α_i

$$\alpha_i^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \alpha_i$$

كما هو موضح كالتالي ، بأخذ عنصر من Y

$$y_1 = \alpha_1^{(1)} e_1 + \alpha_2^{(1)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(1)} e_n$$

$$y_2 = \alpha_1^{(2)} e_1 + \alpha_2^{(2)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(2)} e_n$$

⋮
⋮
⋮

$$y_r = \alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(r)} e_n$$

⋮
⋮
⋮

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

نلاحظ أن كل عمود هو عبارة عن متتالية كوشية متقاربة ومنه نستطيع أن نكتب عنصر يمثل هذه النهايات (نهايات المتتاليات الكوشيات)

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

نلاحظ أن $y \in Y$ لأنه مؤلّد بالجملة $\{e_1, \dots, e_n\}$ (عملاً)

وإن y يلعب دور نهاية للمتتالية y_m أي

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^m - \alpha_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^m - \alpha_i| \|e_i\|$$

ولما كان $\alpha_i^m \rightarrow \alpha_i$ (كوشيات متقاربة) فإن الطرف الأيمن من المساواة يسعى إلى الصفر وبالتالي فإن

$$\|y_m - y\| \rightarrow 0$$

أي بالاعتماد على التعريف نجد أن $y_m \rightarrow y$

وهذا يبين أن (y_m) متقاربة في Y ونهايتها (y) ومنه Y تام

ولنثبت الطرف الثاني من المبرهنة أنه بوجه خاص كل فضاء جزء من نفسه أي $(X \subseteq X)$ وبالاعتماد

على الشرط الأول من المبرهنة فإن X جزئي منه البعد أي أن X تاماً

تم المطلوب .
كنتيجة لهذه المبرهنة ومبرهنة سابقة مرت معنا في الفضاءات المترية سنورد المبرهنة التالية :

مبرهنة الانغلاق :

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لا بد أن يكون مغلقاً

البرهان :

ليكن لدينا $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم وليكن لدينا Y فضاء جزئي منتهي البعد من X يجب علينا إثبات أن Y لا بد أن يكون مغلقاً في X ولإثبات ذلك يكفي أن نثبت أن $Y = \bar{Y}$, انطلاقاً من تعريف اللصاقة كونها أصغر مجموعة مغلقة تحوي Y فإن $Y \subseteq \bar{Y}$ والآن لنثبت الاحتواء الثاني ، لنأخذ عنصر اختياري من اللصاقة $y \in \bar{Y}$ عندئذ حسب مبرهنة اللصاقة يكون لدينا متتالية من عناصر Y ($y_n \in Y$) تتقارب من y ، وكون X هو الفضاء الكلي فإن أي متتالية متقاربة فيه ستكون النهاية تنتمي إلى هذا الفضاء أي $y \in X$ وكون Y فضاء جزئي منتهي البعد في X فهو تام بخصوص الطوبولوجيا المعرفة على X أي أن المتتالية y_n فيه ستكون متقاربة من y وحسب تعريف التقارب وكون النهاية وحيدة وإن التقارب يتم في Y أي $y \in Y$ ومنه $\bar{Y} \subseteq Y$ من الاحتوائين السابقين نجد أن $Y = \bar{Y}$ ومنه Y فضاء جزئي مغلق .

تعريف النظم المتكافئة :

نقول عن النظم $\|\cdot\|_1$ على فضاء متجهي X أنه مكافئ للنظم $\|\cdot\|_2$ على X إذا وجد عدنان موجبان a و b بحيث يتحقق الشرط

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

أياً كان $(x \in X)$ حيث أن الاختلاف هنا بالطوبولوجيا المعروفة .

نتيجة :

النظم المتكافئان على X يحددان على X طوبولوجيا واحدة .

البرهان :

ليكن $(X, \|\cdot\|_1)$ و $(X, \|\cdot\|_2)$ فضاءين منظمين متكافئين ومنه يوجد عددين موجبين

$$a, b \geq 0 \text{ بحيث يتحقق لدينا مايلي : } \forall x \in X \quad a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

ونريد إثبات أن التوبولوجيا التي يولدها $\|\cdot\|_1$ هي نفسها التي يولدها النظم $\|\cdot\|_2$ بمعنى آخر نريد

برهان أن المجموعات المفتوحة في $(X, \|\cdot\|_1)$ هي نفسها المجموعات المفتوحة في $(X, \|\cdot\|_2)$ أي

برهان أن $B(x, \varepsilon)$ مفتوحة في $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow B(x, \varepsilon)$ مفتوحة في $(X, \|\cdot\|_2)$ لتكن

$$B(x, \varepsilon) = \{x \in X ; \|x\|_1 < \varepsilon\} \Leftrightarrow B(x, \varepsilon) = \{x \in X ; a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 < \varepsilon\}$$

$$\Leftrightarrow B(x, \varepsilon) = \{x \in X ; \|x\|_2 < \frac{\varepsilon}{a}\} \Leftrightarrow$$

$$B(x, \varepsilon) = \left\{x \in X ; \|x\|_2 < \frac{\varepsilon}{a}\right\} \Leftrightarrow$$

وهي كرة مفتوحة في $(X, \|\cdot\|_2)$

(\Rightarrow) لتكن لدينا $B(x, \varepsilon)$ كرة مفتوحة في $(x, \|\cdot\|_2)$

$$B(x, \varepsilon) = \{x \in X ; \|x\|_2 < \varepsilon\} \Leftrightarrow$$

$$B(x, \varepsilon) = \left\{x \in X ; \frac{1}{b} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow$$

$$B(x, \varepsilon) = \{x \in X ; \|x\|_1 < \varepsilon \cdot b\} \Leftrightarrow$$

ومنه $B(x, \varepsilon)$ مفتوحة في $(x, \|\cdot\|_1)$

مما سبق نجد أن النظم المتكافئة تولد نفس المجموعات المفتوحة وبالتالي تواد نفس الطوبولوجيا .
تم المطلوب

ملاحظات :

1. عندما نتحدث عن مجموعة ما أنها مغلقة أو مفتوحة يجب تحديد الساحة التي تكون فيها هذه المجموعة مغلقة أو مفتوحة .
مثال : لو أخذنا الفضاء $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ فضاء منظم ولناخذ الفضاء الجزئي $(x, 0)$ حيث $x \in \mathbb{R}$ (مجموعة النقاط التي تراتيبها أصفار أي المحور OX)
فإننا نجد أن هذا الفضاء الجزئي منتهي البعد فهو مغلق في \mathbb{R}^2 بينما لو نظرنا في \mathbb{R} لوحده فهو مغلق ومفتوح بنفس الوقت .
2. إن الكرة المفتوحة $B(x, \varepsilon)$ في النتيجة السابقة في الفضاء $(x, \|\cdot\|_1)$ بقيت مفتوحة في $(x, \|\cdot\|_2)$ عندما غيرنا دالة النظم دون أن تغيير عناصر هذه الكرة بزيادة أو نقصان .

انتهت المحاضرة