نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة: التاسعة عشرة ◄ عنوان المحاضرة: أبراج JH

مبرهنة : ليكن M مودول على الحلقة A ولنأخذ N مودول جزئي من M عندئذ :

M يملك برج جوردان هولدر $\Leftrightarrow$ M/N و N يملكان برجي جوردان هولدر أضف إلى ذلك :

$$l(M) = l(N) + l(M/N)$$

البرهان

$\Leftarrow$ ليكن $(S): M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots\ldots. \supsetneq M_r = 0$ برج JH لـ M

والمطلوب إيجاد برجي JH لـ M/N و N من البرج السابق :

لايجاد برج JH لـ N من البرج S سوف يتم تقاطع كل حد من حدود S مع N فإن :

$$(S_N) : N = M_0 \cap N \supset M_1 \cap N \supset \ \ldots\ldots. \supset M_r \cap N = 0$$

ولدينا $M_i \cap N$ مودولات جزئية من M وذلك لان تقاطع مودولات جزئية هو مودول جزئي $\forall i \in \{0,1,,,,,,,,,n\}$

لندرس عوامل S_N

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap N} \overset{M_i \supsetneq M_{i+1}}{\cong} \frac{M_i \cap N}{(M_{i+1} \cap M_i) \cap N} = \frac{M_i \cap N}{M_{i+1} \cap (M_i \cap N)}$$

$$\underbrace{\cong}_{\substack{\frac{N_1+N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \\ \text{مبرهنة التماثل الثالثة}}} \frac{M_{i+1} + (M_i \cap N)}{M_{i+1}} \subseteq \frac{M_i}{M_{i+1}}$$

ويكون عندها $\frac{M_{i+1}+(M_i\cap N)}{M_{i+1}}$ مودول جزئي من $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ وبالتالي $\frac{(M_i\cap N)}{(M_{i+1}\cap N)}$ يماثل مودول جزئي من المودول $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ ولكن $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مودول بسيط لأن S هو JH وبالتالي :

$$\frac{(M_i \cap N)}{(M_{i+1} \cap N)} \cong \begin{cases} 0 & \text{مودول صفري} \\ \frac{M_i}{M_{i+1}} & \text{بسيط} \end{cases}$$

اذاً بإهمال الحدود المتكررة في S_N نحصل على برج ل N وعوامله تماثل مودولات بسيطة اذا هو برج JH

ولنوجد برج JH ل M/N ومنه لنأخذ السلسلة :

$$(S_{M/N}): \frac{M}{N} = \frac{M_0 + N}{N} \supset \ldots\ldots\ldots \supset \frac{M_r + N}{N} = 0_{\frac{M}{N}} = N$$

لندرس عوامل السلسلة $S_{M/N}$

لنطبق مبرهنة التماثل فنجد :

$$N \subseteq M_{i+1} + N : \quad \frac{M_i + N}{M_{i+1} + N} \underbrace{\cong}_{\text{حسب مبرهنة التماثل الثانية}} \frac{\frac{M_i + N}{N}}{\frac{M_{i+1} + N}{N}}$$

$$\frac{M_i + (M_{i+1} + N)}{M_{i+1} + N} = \frac{(M_i + M_{i+1}) + N}{M_{i+1} + N} \underbrace{=}_{M_i + M_{i+1} = M_i \Leftarrow M_i \supset M_{i+1}}$$

$$\frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\frac{M_i \cap (M_{i+1} + N)}{M_{i+1}}} \underbrace{\cong}_{\text{حسب مبرهنة التماثل الثانية}} \frac{M_i}{M_i \cap (M_{i+1} + N)} \underbrace{\cong}_{\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}}$$

$$M_{i+1} \subset M_i \cap (M_{i+1} + N) :$$

$$\Longrightarrow \frac{M_i + N/N}{M_{i+1} + N/N} \cong \frac{M_i/M_{i+1}}{(M_i \cap (M_{i+1} + N))/M_{i+1}}$$

بالتالي $\frac{M_i \cap (M_{i+1}+N)}{M_{i+1}}$ مودول جزئي من المودول البسيط $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ فإن أي مودول جزئي منه يكون

$$\frac{M_i \cap (M_{i+1} + N)}{M_{i+1}} = \begin{cases} 0 \ \text{مودول صفري} & \text{إما} \\ \frac{M_i}{M_{i+1}} \ \text{بسيط} & \text{أو} \end{cases}$$

وبالتالي إما:

$$\frac{\frac{M_i + N}{N}}{\frac{M_{i+1} + N}{N}} \cong \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{0} = \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\frac{M_{i+1}}{M_{i+1}}} \cong \frac{M_i}{M_{i+1}} \quad \text{وهو بسيط}$$

أو:

$$\frac{\frac{M_i + N}{N}}{\frac{M_{i+1} + N}{N}} \cong \frac{\frac{M_i}{M_{i+1}}}{\frac{M_i}{M_{i+1}}} = 0$$

ومنه وبعد حذف الحدود المتكررة في $S_{M/N}$ نحصل على سلسلة ل M/N عواملها تماثل مودولات بسيطة وبالتالي نكون قد حصلنا على برج JH ل M/N .

لنفرض $\Longrightarrow$ $(S_N) : N = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \dots\dots . \supsetneqq N_t = 0$

$$(S_{M/N}) : \frac{M}{N} = U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq \dots\dots . \supsetneqq U_r = 0_{\frac{M}{N}} = N$$

هما برجي JH لـ $M/N\ , N$ على الترتيب .

وبالتالي حسب مبرهنة التقابل بين المودولات الجزئية من M التي تحوي N و المودولات الجزئية من M/N نجد أنه لكل U_i يوجد مودول وحيد M_i مودول جزئي من M يحوي N بحيث

$$U_i = \frac{M_i}{N} \quad ; i = 0,1, \dots\dots , r$$

وبالتالي نحصل على ما يلي :

$$: M \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots\dots \supsetneqq M_r = N$$

بوصل هذه المتتالية من المودولات مع S_N نحصل على برج ل M

$$S_M : M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots\dots \supsetneqq M_r = N = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \dots\dots . \supsetneqq N_t = 0$$

هي سلسلة نظامية للمودول M وكذلك عواملها بسيطة لأن :

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \frac{\frac{M_i}{N}}{\frac{M_{i+1}}{N}} = \frac{U_i}{U_{i+1}} \quad : N \subset M_{i+1}$$

ولكن لدينا $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ مودول بسيط لان $S_{M/N}$ برج JH ل M اذاً $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ مودول بسيط من اجل $i = 0,1, \dots, r-1$ وكذلك $\frac{N_j}{N_{j+1}}$ بسيط لان S_N برج JH وبالتالي S_M برج للمودول M وهو برج JH وكذلك

و $l(M) = l\left(\frac{M}{N}\right) + l(N) = r + t$ وهو المطلوب .

المودولات الحرة

تعريف : لتكن A حلقة عندئذ نرمز لـ $\prod_{i \in I} A$ (الجداء الديكارتي لـA بنفسها I مرة) .ونرمز لها ب $A^{[I]}$

- نرمز ب $A^{[I]}$ للمجموع المباشر ل A مع نفسها I مرة أي أن $A^{[I]} = \bigoplus_{i \in I} A$

تعاريف : ليكن M مودول على الحلقة A وليكن $S \subset M$ مجموعة جزئية من M عندئذ نعرف المودول الجزئي من M المولد بـ S بأنه أصغر المودولات الجزئية من M التي تحوي S وتكتب

$$< S > = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i S_i \ : \ n \in \mathbb{N}^* \, ; a_i \in A \, , S_i \in S \ ; i = 1,2, \dots\dots, n & : \ S \neq \emptyset \\ 0 & : \ S = \emptyset \end{cases}$$

<u>تراكيب خطية منتهية .</u>

<u>عندها</u>

- نقول عن S أنها جملة مولدة ل $M \iff M =< S >$.
- نقول عن S أنها مستقلة خطياً (حرة) $\iff \forall a_i \in A \, , \forall S_i \in S$ لأجل أي $n \in N^*$ $\quad a_1 S_1 + \cdots \dots + a_n s_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots \dots = a_n = 0$
- S قاعدة ل $M \iff S$ مولدة ومستقلة خطياً (حرة).

تعريف : ليكن $m \in M$ عندئذ نقول عن m أنه عنصر فتل ل M اذا تحقق ما يلي $\exists a \in A^* : a.m = 0$

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي