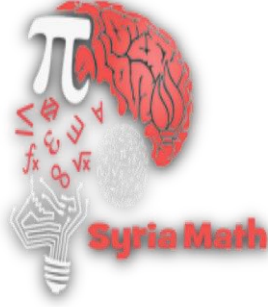


18-12-2017

نظري



- ◀ دكتوراة المادة: جال مللي  
 ◀ المحاضرة: التاسعة عشر (و الأخيرة)  
 ◀ عنوان المحاضرة: النظام المتكافئة والتراص

**المستوى العلمي:** أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- النظام المتكافئة

٢- التراص

٣- ملحق العملي كاملاً ((جميع تمارين العملي التي تم حلها في محاضرات العملي و المطلوبة للامتحان))

**مبرهنة النظام المتكافئة :**

كل تنظيم  $\| \cdot \|$  على فضاء متجهي منتهي البعد  $X$  لا بد أن يكافئ أي تنظيم آخر  $\| \cdot \|_0$  على  $X$ .

**الإثبات:**

ليكن لدينا  $X$  فضاء متجهي وليكن لدينا  $\| \cdot \|, \| \cdot \|_0$  معرفين على  $X$  حتى يتم المطلوب يجب علينا إثبات أن التنظيمين  $\| \cdot \|, \| \cdot \|_0$  متكافئين أي يجب أن يحققا تعريف التنظيمين المتكافئين أي أنه يوجد  $a, b > 0$  بحيث  $a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$  (وذلك  $\forall x \in X$ )

لدينا فرضاً الفضاء المتجهي  $X$  منتهي البعد ولنفرض أن بعده  $n$  ( $\dim X = n$ ) حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  عندئذ فإن هذا الفضاء مؤلّد بقاعدة ولتكن  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  عندئذ كل عنصر  $x \in X$  يكتب على شكل تركيب خطي وبشكل وحيد بدلالة عناصر هذه القاعدة كالتالي :

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$\|x\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n\|$$

بأخذ تنظيم الطرفين وحسب مبرهنة التراكيب الخطية عندئذ يوجد  $c > 0$  بحيث :

$$\|x\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i| ; c > 0$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \Rightarrow \frac{\|x\|}{c} \geq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad -١$$

وكون  $\|\cdot\|_0$  نظيم أيضاً على  $X$  فإنه :

$$\|x\|_0 = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n\|_0 \leq \|\alpha_1 e_1\|_0 + \|\alpha_2 e_2\|_0 + \dots + \|\alpha_n e_n\|_0$$

حسب متراجحة المثلث كونها محققة لأن  $\|\cdot\|_0$  نظيم فرضاً .  
وذلك بالاعتماد على خواص النظيم ليكون لدينا :

$$\|x\|_0 \leq |\alpha_1| \|e_1\|_0 + |\alpha_2| \|e_2\|_0 + \dots + |\alpha_n| \|e_n\|_0$$

$$\Rightarrow \|x\|_0 \leq \sum_{i=1}^n (|\alpha_i| \|e_i\|_0)$$

باختيار  $k = \max\{\|e_i\|_0 ; i = 0, 1, 2, \dots, n\}$  يكون لدينا :

$$\|x\|_0 \leq k \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \Rightarrow \frac{\|x\|_0}{k} \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \dots \dots -٢$$

من ١ و ٢ نجد أن :  $\frac{\|x\|}{c} \geq \frac{\|x\|_0}{k}$

$$\Rightarrow \|x\| \geq \frac{c}{k} \cdot \|x\|_0 \Rightarrow a \|x\|_0 \leq \|x\| ; a = \frac{c}{k}$$

باتباع نفس الخطوات وبجعل كل من النظيمين يلعب دور النظيم الآخر نحصل على التراجع الآخر نجد أن

$$\frac{\|x\|_0}{c} \geq \frac{\|x\|}{k} \Rightarrow \frac{k}{c} \cdot \|x\|_0 \geq \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq b \cdot \|x\|_0$$

$$b = \frac{k}{c}$$

مما سبق نجد أن  $a \|x\|_0 \leq \|x\| \leq b \cdot \|x\|_0$

ومنه تم المطلوب والنظيمين  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_0$  متكافئين ومنه أي نظيمين معرفين على الفضاء  $X$  منتهي البعد يجب أن يكونان متكافئين .

◀ إن الفضاءات المنظمة منتهية البعد والفضاءات الجزئية منها ترتبط بمفهوم التراص الذي نعرّفه على النحو التالي :

### تعريف التراص :

نقول عن الفضاء  $X$  المترى إنه متراص إذا حوت كل متتالية في  $X$  متتالية جزئية متقاربة ونقول عن مجموعة جزئية  $M$  من  $X$  أنها متراصة إذا كانت  $M$  متراصة باعتبارها فضاءً جزئياً ، أي إذا حددت كل متتالية في  $M$  جزئية نهايتها عنصر من  $M$  .

والآن سنورد تمهيدية تقدم سمة عامة للمجموعات المتراصة

### تمهيدية التراص :

كل مجموعة جزئية  $M$  متراسة من فضاء متري مغلقة ومحدودة .

**الإثبات :**

ليكن لدينا  $(X, d)$  فضاء متري وليكن لدينا  $M \subseteq (X, d)$  مجموعة جزئية وغير خالية فإذا كانت  $M$  متراسة نريد إثبات أنها مغلقة ومحدودة .

بدايةً لنثبت الإغلاق ، يكفي لإثبات أن  $M$  مغلقة أن نثبت أن  $M = \bar{M}$

لدينا حسب التعريف اللصاقة  $M \subseteq \bar{M}$  "أصغر مغلقة تحويها" .

ولإثبات الاحتواء الآخر نأخذ عنصر كفي من  $\bar{M}$  ( $x \in \bar{M}$ ) ونثبت أن  $x \in M$  كون  $x \in \bar{M}$  فإنه حسب تعريف اللصاقة يوجد متتالية ولتكن  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  من عناصر  $M$  بحيث هذه المتتالية تتقارب من  $x$  أي  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  وكون  $M$  متراسة فإن أي متتالية فيها (بغض النظر متقاربة أو متباعدة) سوف تحوي متتالية جزئية متقاربة في  $M$  ولتكن هذه المتتالية  $x_{n_k}$  ونهايتها  $x_1$  أي  $x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1$  ولكن لدينا المتتالية الأصلية  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة وبالتالي فإن أي متتالية جزئية فيها ستكون متقاربة إلى نفس النهاية أي أن  $x = x_1 \in M$  ومنه  $x \in M$  أي أن  $\bar{M} \subseteq M$  من الاحتوائين السابقين نجد أن  $\bar{M} = M$  ومنه  $M$  مجموعة مغلقة .

والآن لنثبت المحدودية ، لنفرض جلاً أن  $M$  ليست محدودة وبالتالي  $\forall k > 0; |y_n| > k; y_n \in M$

أي أن هذه المتتالية غير محدودة وبالتالي فإن بعدها عن أي نقطة مثبتة في الفضاء سيكون  $d(y_n, b) > n$  مثل هذه المتتالية لا يمكن أن تمتلك متتالية جزئية متقاربة وهذا يناقض كون  $M$  متراسة وبالتالي فإن الفرض الجدلي خاطئ وإن  $M$  محدودة .

- وإن عكس هذه المبرهنة غير صحيح بشكل عام . أي إذا كان لدينا  $M \subseteq X$  مغلقة ومحدودة وليس بالضرورة أن تكون متراسة (بغض النظر عن بعد الفضاء)

**البرهان :**

لإثبات ذلك نأخذ المتتالية  $(e_n)$  في  $\ell^2$  حيث  $e_n = (\delta_{nj})$  متتالية حدها ذو الترتيب  $n$  يساوي 1 في حين تكون حدودها الأخرى أصفار كالتالي

$$\begin{aligned} e_1 &= 1,0,0,0, \dots \\ e_2 &= 0,1,0,0, \dots \\ &\vdots \\ e_n &= 0,0,0,0 \dots \dots, 1, \dots \end{aligned}$$

إن هذه المتتالية محدودة لأن  $\|e_n\| = 1$  كما تشكل حدودها مجموعة مغلقة لعدم وجود نقطة تراكم لها فإن هذه المجموعة ليست متراسة للسبب نفسه .

**مبرهنة التراص في فضاءات منظمة منتهية البعد :**

الشرط الازم والكافي كي تكون المجموعة  $M$  من فضاء منظم منتهي البعد متراسة هو أن تكون  $M$  مغلقة ومحدودة .

**الإثبات :** نريد إثبات أنه منتهي البعد

$M$  مغلقة  $\Leftrightarrow M \subseteq X$  متراسة

( $\Rightarrow$ ) وقد أثبتنا هذا الإتجاه في المبرهنة السابقة .

( $\Leftarrow$ ) أي نريد إثبات أنه إذا كانت  $M$  مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء منتهي البعد فإن  $M$  متراسة (أي يجب علينا أن نثبت أن أي متتالية اختيارية من  $M$  تحوي متتالية جزئية متقاربة)

ليكن لدينا  $(X, \|\cdot\|)$  فضاء منظم منتهي البعد ولتكن  $M \subseteq X$  مجموعة مغلقة ومحدودة ولدينا من الفرض أن  $X$  منتهي البعد وليكن بعده  $n$  .

عندئذ فإن هذا الفضاء مولد بقاعدة  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$

لنأخذ متتالية  $\{x_n\} \in M$  وكون  $M$  مجموعة محدودة فأنا نستطيع أن نجد جميع عناصر هذه المتتالية بعدد موجب  $\|x_m\| \leq k ; \exists k > 0$  ، وأن  $\{x_n\}$  نكتب على شكل تركيب خطي وبشكل وحيد بدلالة عناصر القاعدة أي:

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \xi_2^m e_2 + \dots + \xi_n^m e_n$$

$$\Rightarrow x_m = \sum_{i=1}^n \xi_i^m e_i \Rightarrow \|x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i^m e_i \right\|$$

وحسب تمهيدية التركيب الخطية وكون  $\{x_n\}$  محدودة يكون لدينا:

$$k \geq \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i^m e_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^n |\xi_i^m| : c > 0$$

وبقسمة الأطراف على  $c$  مع ملاحظة أن مجموع مقادير موجبة أصغر من  $\frac{k}{c}$  ومنه فإن كل من هذه المقادير وسيكون أصغر من  $\frac{k}{c}$  .

$$\Rightarrow |\xi_i^m| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i^m| \leq \frac{k}{c}$$

ومنه نجد أن المتتالية  $(\xi_i^m)$  محدودة (بالاعتماد على تعريف المحدودية في المتتاليات )

وبالتالي حسب بولزانوفير استراش (كل متتالية حقيقية محدودة تملك نقطة تجمع لهذه المتتالية)

وبالتالي نجد أن المتتالية  $\xi_i^m$  تملك نقطة تجمع ولتكن  $\xi_i$  وهذا يعني أنها تملك متتالية جزئية لهذه المتتالية بحيث تكون متقاربة من نفس النهاية :

$$x_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_2^1 e_2 + \dots + \xi_n^1 e_n$$

$$x_2 = \xi_1^2 e_1 + \xi_2^2 e_2 + \dots + \xi_n^2 e_n$$

$\vdots$

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \xi_2^m e_2 + \dots + \xi_n^m e_n$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_n \end{array}$$

أي أصبح لدينا كل عمود عبارة عن متتالية محدودة وبالتالي يكون لدينا  $(n)$  متتالية محدودة وحسب مبرهنة بولزانوفيراستراش يوجد نقطة تراكم لكل عمود من الأعمدة ومنه كل متتالية عامود ستملك متتالية جزئية متقاربة فإذا أخذنا متتالية العامود الأول وكونها محدودة وحسب بولزانوفيراستراش فهي تملك متتالية متقاربة إذا أخذنا متتالية جزئية من متتالية الأعمدة الثانية بحيث تتوافق مع أدلة المتتالية الجزئية في العامود الأول فإننا نجد هذه الجزئية أيضاً تملك نقطة تجمع وبالتالي تملك متتالية جزئية تتقارب من هذه النقطة نأخذ متتالية جزئية من العامود الثالث بحث تتوافق أدلتها مع الجزئية في العامود الثاني فتكون محدودة وتملك نقطة تجمع وهكذا تستمر بنفس الطريقة إلى أن نصل إلى متتالية العامود  $n$  نكون قد حصلنا على متتالية جزئية  $\{x_m\}$  متقاربة ولتكن هذه المتتالية الجزئية  $\{x_{m_k}\}$  وكون  $M$  مغلقة فإن كل متتالية متقاربة تكون متقاربة في  $M$  أي أنه أيضاً  $\{x_{m_k}\}$  تكون متقاربة في  $M$  كونها جزئية من  $\{x_m\}$  أي أصبح لدينا المتتالية  $\{x_m\} \in M$  تملك متتالية جزئية متقاربة في  $M \Leftarrow M$  متراسة.

تم المطلوب

### أمثلة

- لنأخذ الفضاء المنظم منتهي البعد  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$
- أن المجموعة  $\{1,2,3\}$  متراسة لأنها مغلقة (لأنها تحوي جميع نقاط تراكمها).
- محدودة (لأنها نستطيع أن نحد جميع عناصر بعدد موجب يكون أكبر من جميع هذه النقاط)
- $[1,2]$  متراسة لأنها مغلقة ومحدودة.
- $[0,1]$  ليست متراسة لأنها ليست مغلقة.
- (لأنها لو كانت مغلقة فأنها ستحوي جميع نقط تراكمها كما أنها ليست مفتوحة لأنه ليس جميع نقاطها داخلية).

### انتهت المحاضرة

إعداد: غفران الربابي - عبدالرحمن البعش - سماح علوان

سنورد الآن جميع نمازين العملي التي ترحلها في محاضرات العملي . . علماً أن جميعها مطلوبة وقد أكد مدرس العملي على أن النمازين المذكورة في الجدول جانباً هي الأهم من أجل الامتحان . . . سنورد جميع نصوص الأسئلة من الكتاب و من ثم سنورد الحلول كافة :

أرقام النمازين	الصفحة
1-2-3	10
14-15	11
7-10	20
11-12-15	21
1-3-4	30
6-10-12	31
6	41
4	51
5-6-8	52
4-5-6-7	60
3	82
11	84
13	85

بذلك نكون قد أنهينا المقرر آمليين أن نكون قد وفقنا في عرضه بأسلوب واضح و سهل و مفهوم ♥

فريق Syria Math التطوعي يتمنى لكم كل التوفيق و النجاح

Syria Math Team



(١) أثبت ان المحور الحقيقي هو فضاء مترى .

(٢) هل قد المساواة  $d(x,y) = (x-y)^2$  مترى على مجموعة الأعداد الحقيقية

(٣) بين ان  $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$  قد مترى على مجموعة الأعداد الحقيقية

(٤) ليكن  $d$  مترى على  $X$  . صد كل الثوابت  $k$  بحيث يكون (i)  $k \cdot d$  (ii)  $d+k$  مترى على  $X$

(٥) بين ان  $d$  في المساواة  $d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$  ;  $x = (x_i)$  ,  $y = (y_i)$  من  $l^\infty$  تحقق متباينة مثلث

(٦) اذا كان  $A$  فضاء جزئى من  $l^\infty$  حوفاً من كل المتتاليات اللتى كل حد فيها إما ٥ او ١ ، فما هو المتك المتك على  $A$  ؟

(٧) بين انه يمكن تعريف مترى آخر  $\tilde{d}$  على المجموعة  $X = C[a,b]$  بالمساواة  $\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$

(٨) اثبت ان  $d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$  هو مترى

(٩) (مسافة هامنج) ليكن  $X$  مجموعة كل الثلاثيات المرتبة من الأعداد والعناصر . بين ان  $X$  تتألف من ثمانية عناصر ، انه يمكن تعريف مترى  $d$  على  $X$  بالمساواة  $d(x,y) =$  عدد المقاطع المتقابلة المختلفة للعنصرين  $x$  و  $y$  . (اذا كان  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ، فإننا نسمي  $x_i$  المقطع أو العنصر . ان هذا الفضاء والفضاءات المماثلة اللتى عناصرها مرتبات  $n$  ترد من العقول ونظريه الأوتوماتا ومن التشفير . يسم  $d(x,y)$  مسافة هامنج بين  $x$  و  $y$ )

(11) أثبت صحة المتباينة  $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$

(12) (متباينة المثلث). لمتباينة المثلث نتأخر فصيحة عدة ، فمثلاً استناداً إلى (11) أثبت أن  $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$

(13) أثبت استناداً إلى متباينة المثلث أن  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$

(14) (وصفونات المترك). من الممكن الاستقانة عن (13) ← (14) ← (15) بمجموعتين أخري (دون تغيير التعريف). بين على سبيل المثال أن (3 م) د (4 م) تستنبات من (م 2) ، مع المتباينة  $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$

(15) بين أن  $d$  المترك أكبر أو يساوي الفرق نتيجة من (م 2) ← (14) ← (15)

### التمرين 19 - ج - أ

(13) أثبت أن متباينة كوشي - بشارتر تقتضي المتباينة  $(|s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|)^2 \leq n(|s_1|^2 + |s_2|^2 + \dots + |s_n|^2)$

(4) (العقاد  $l^p$ ) أوجد متباينة تقارب من 0 دون أن تكون متقوية أي أي فضاء  $l^p$  حيث  $1 \leq p < +\infty$

(5) أوجد متباينة  $x$  متقوية أي  $l^p$  ، حيث  $p > 1$  ، لا تنفي أي  $l^1$

(6) (القطر، المجموعة المحدودة). ان القطر  $S(A)$  لمجموعة غير خالية  $A$  من فضاء متري  $(X, d)$  يعرف بأنه  $S(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$  . ومفعل عن  $A$  إلى مجموعة إذا كان  $S(A) < \infty$  . بين أنه إذا كان  $A \subset B$  فإن  $S(A) \leq S(B)$

(7) بين بأن الشرط اللازم والكافي لي يكون  $S(A) = 0$  هو أن تكون  $A$  مجموعة مفيدة العطر

(8) المسافة بين المجموعتين. تعرف المسافة  $D(A, B)$  بين مجموعتين غير خاليتين  $A, B$  في فضاء مترقي  $(X, d)$  بالمعادلة

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$$

بين ان  $D$  لا يقيد مترقياً على مجموعة اجزاء  $X$ . (هذا السبب اسبقنا اجزاً آخر  $D$ . ولكنه رغم ذلك يتركنا بالترك  $d$ .)

(9) اذا كان  $A \cap B \neq \emptyset$ ، فبين ان  $D(A, B) = 0$  في المسألة (8).  
علاوة على ذلك، هل يمكن قولك العكس؟

(10) تعرف المسافة  $D(x, B)$  بين النقطة  $x$  والمجموعة غير الخالية  $B$  في  $(X, d)$  بالمعادلة

$$D(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b)$$

التي تتفق مع المسألة (8). بين ان  $D(x, B) = 0$  اذا وفقط اذا كان  $x \in B$ .  
بين ان  $|D(x, B) - D(y, B)| \leq d(x, y)$

(11) اذا كان  $(X, d)$  اي فضاء مترقي، فثبت ان المسافة

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

تحدد مترقياً آخر على  $X$ ، وان  $X$  محدودة في المترق  $\tilde{d}$

(12) بين ان اجتماع مجموعتين محدودتين  $A, B$  في فضاء مترقي له مجموعة محدودة

(13) (جاء فضائين مترقين). من الممكن جعل الجداء الديكارتي  $X = X_1 \times X_2$  لفضائين مترقين  $(X_1, d_1)$  و  $(X_2, d_2)$  فضاء مترقياً  $(X, d)$  بأسفالك مختلفة  
علاوة على ذلك، نرى ان المسافة التالية تقيد مترقياً  $d$

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

حيث  $x = (x_1, x_2)$  و  $y = (y_1, y_2)$





التمرين 41

(1) (المتتالية الجزئية) إذا كانت متتالية  $(x_n)$  في فضاء مترى  $X$  متقاربة وكانت  $x$  نقطة في  $X$ ، فبين أن كل متتالية جزئية  $(x_{n_k})$  من  $(x_n)$  تكون متقاربة نحو  $x$ .

(2) إذا كانت  $(x_n)$  متتالية كوشي في فضاء مترى  $X$  متقاربة نحو  $x$  فبين أن  $(x_n)$  متقاربة وأن كل متتالية جزئية  $(x_{n_k})$  متقاربة نحو  $x$ .

(4) (المحدودية) أثبت أن كل متتالية كوشي محدودة.

(5) هل يكفي كون متتالية في فضاء مترى محدودة لكي تكون متتالية كوشي؟ وهل يكفي هذه المحدودية لتكون المتتالية متقاربة؟

(6) إذا كانت  $x_n, y_n$  متتاليتين كوشي في فضاء مترى  $(X, d)$ ، فبين أن  $a_n = d(x_n, y_n)$  متتالية متقاربة. أعط أمثلة توضيحية.

التمرين 50 - 51

(1) لكن  $a, b$  عددين حقيقيين حيث يكون  $a < b$ . اثبت أن الفترة المفتوحة  $(a, b)$  هي فضاء جزئي غير تام من  $\mathbb{R}$ ، في حين أن الفترة المغلقة  $[a, b]$  تامة.

(2) ليكن  $X$  فضاء كل أطباقات  $n$  من الأعداد الحقيقية  $(x_1, \dots, x_n)$  ولنفرض أن  $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$  حيث  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . اثبت أن  $(X, d)$  فضاء تام.

(3) ليكن  $M$  فضاء جزئياً من  $\mathbb{R}^{\infty}$  مؤلفاً من كل المتتاليات  $(x_i)$  التي حدود كل فرع أصفاء جميعها باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الأكثر. أوجد متتالية كوشي في  $M$  غير متقاربة في  $M$ ، الأمر الذي يبين أن  $M$  غير تام.

(5) اثبت أن مجموعة كل الأعداد الصحيحة  $X$  المزودة بالتركيب المترى  $d$  المعرف بالساداة  $d(m, n) = |m - n|$  تشكل فضاء مترى تاماً.

(6) بين ان مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزدوجة المتمركزة  $d$  المحددة بالمعادلة

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

تشكل مفضاً مترياً غير تام

(7) لتكن  $X$  مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبة، والـ  $d(m, n) = |m - n|$  اثبت ان  $(X, d)$  مفضاً مترياً غير تام.

(8) الفضاء  $(C[a, b])$  اثبت ان الفضاء الجزئي لاجن  $C[a, b]$  لمؤلفين من كل الدوال  $x \in C[a, b]$  المحققة للشرط  $x(a) = x(b)$  هو مفضاً مترياً غير تام.

التمرين 60 - 61

(5) (الهوميو مورفيزم أو التماثل) الهوميو مورفيزم هو تطبيق متر متباين دعامر  $X \rightarrow Y$  ان كان  $T: X \rightarrow Y$  متر متباين عندئذ يمكن ان نضاهي بين المترين  $X$  و  $Y$  ايضاً هو مفضاً مترياً.

(أ) اثبت ان  $X$  اذا كان  $X$  و  $Y$  متر متباينين، فانها الهوميو مورفيزم.

(ب) بين ان ايراد احد التماثلات المفضية المترية التام، والفضاء المترية غير التام قد يكونا الهوميو مورفيزم.

(6) اثبت ان الفضاءين  $C[a, b]$  و  $C[a, c]$  متر متباينين.

(7) اذا كان  $(X, d)$  مفضاً مترياً، فبرهن ان  $(X, \tilde{d})$  مفضاً مترياً حيث  $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$  مفضاً مترياً كذلك.

(9) بين ان  $(X, d)$  اذا كانت  $(x_n)$  متتالية في  $(X, d)$  بحيث تحقق الشرط  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$  وان  $x_n \rightarrow a$  فان  $x_n$  تكون متقاربة كما تكون لا تبتعد عن  $a$ .

(10) اذا كانت  $(x_n)$  متتالية متقاربة في مفضاً مترياً  $(X, d)$  وكان لها نهاية واحدة  $a$ ، فاثبت ان  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$ .

(11) برهن أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0$  يعرف علامة تكافؤ على مجموعة كل ملتاليات كوسين  
التي عناصرها في  $X$

الصفحة 82 - 84 - 85

(3) اثبت صحة  $\|y - x\| \leq \|y\| - \|x\|$

(11) (المجموعة المحدبة، المقعدة المستقيمة)، يقال عن مجموعة جزئية  $A$  من فضاء معين  $X$  انزاحية اذا امّطره مجموع اي نقطتين  $x, y$  من  $A$  تحقق العلاقة

$$M = \{z \in X; z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

تدعى  $M$  مقعدة مستقيمة مغلقة اذا ما، والنقطتان  $x, y$ ، وتدعى كل نقطة  
اخرى من  $Z$  نقطة داخلية في  $M$ ، بين ان الكرة الداخلية المغلقة

$$\bar{B}(0,1) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

في فضاء منظم  $X$  حبه

(13) بين ان المترنق المقطع على فضاء مترنق  $X \neq \{0\}$  لا يمكن ان يكون منظم

الصفحة 106

(13) اذا كان  $X$  فضاء مترنقاً متراساً، وكانت  $M$  مجموعة جزئية مغلقة في  $X$   
فسيكون  $M$  متراساً.

P.10

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (x,y) \mapsto d(x,y) = |x-y| \quad (\mathbb{R}, d) \quad (1Q)$$

أياً كانت  $x, y, z$  من  $\mathbb{R}$

- 1)  $|x-y| \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$     2)  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x=y$
- 3)  $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1| \cdot |y-x| = |y-x| = d(y,x)$
- 4)  $d(x,y) = |x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

$$d(x,y) = (x-y)^2 \quad (2Q)$$

لذا، نلاحظ أنّ:  $d(0,4) = (0-4)^2 = (-4)^2 = 16$      $d(0,2) = (0-2)^2 = (-2)^2 = 4$      $d(2,4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$

أي:  $d(0,4) > d(0,2) + d(2,4)$  متباينة المثلث غير محققة

$$d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{2}} \quad (3Q)$$

- 1)  $|x-y| \geq 0 \Rightarrow |x-y|^{\frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$     2)  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y|^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x=y$
- 3)  $d(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{2}} = |y-x|^{\frac{1}{2}} = d(y,x)$
- 4)  $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \Rightarrow |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq \left[ |x-z|^{\frac{1}{2}} + |z-y|^{\frac{1}{2}} \right]^2 \Rightarrow |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq |x-z|^{\frac{1}{2}} + |z-y|^{\frac{1}{2}}$   
 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\tilde{d} = d + k \quad (ii) \quad \bar{d} = kd \quad (i) \quad (X, d) \quad (5Q)$$

(i) أياً كانت  $x, y, z$  من  $X$

- 1)  $\bar{d}(x,y) \geq 0 \Rightarrow kd(x,y) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$
- 2)  $\bar{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow kd(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y \quad k \neq 0$
- 3)  $\bar{d}(x,y) = kd(x,y) = kd(y,x) = \bar{d}(y,x)$
- 4)  $\bar{d}(x,y) = kd(x,y) \leq k[d(x,z) + d(z,y)] = kd(x,z) + kd(z,y) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y) \quad k \geq 0$   
 يجب أن تكون  $k > 0$

- 1)  $\tilde{d}(x,y) \geq 0 \Rightarrow d(x,y) + k \geq 0 \Rightarrow k \geq -d(x,y) \Rightarrow k \geq 0 \quad (ii)$
- 2)  $\tilde{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) + k = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = -k \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y \quad k=0$
- 3)  $\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + k = d(y,x) + k = \tilde{d}(y,x)$
- 4)  $\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + k \leq d(x,z) + d(z,y) + k \leq d(x,z) + k + d(z,y) + k = \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y) \quad k \geq 0$   
 يجب أن تكون  $k=0$

$$z = (\xi_i) \in \ell^\infty \quad \text{بين} \quad \ell^\infty \quad y = (\eta_i) \ni x = (\xi_i) \quad \text{مبني} \quad d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| \quad (6Q)$$

$$\forall i \in \mathbb{N} : |\xi_i - \eta_i| \leq |\xi_i - \xi'_i| + |\xi'_i - \eta_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \xi'_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi'_i - \eta_i| = d(x,z) + d(z,y)$$

\*)  $d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$  هو أصغر حد أعلى  
 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$  : لأنه لأي  $i \in \mathbb{N}$  يمكن  
 $d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$  لأنه لأي  $i \in \mathbb{N}$  ومنه :

$\forall i \in \mathbb{N} : \xi_i, \eta_i \in ]0,1[ \quad y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad (7Q)$

□  $x = y \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \xi_i = \eta_i \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \xi_i - \eta_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : |\xi_i - \eta_i| = 0 \Rightarrow d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| = 0$

□  $x \neq y \Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} : \xi_j \neq \eta_j \Rightarrow |\xi_j - \eta_j| = 1 \Rightarrow d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| = 1$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$\bar{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \quad X = C[a,b] \quad (8Q)$   
 تذكر:

1) كل دالة مستمرة قابلة للتكامل

2)  $\int_a^b f(t) dt = 0$  و  $f \geq 0$  مستمرة على  $[a,b]$   $\Leftrightarrow f \equiv 0$  (\*)  
 أيًا كان  $x, y, z$  من  $C[a,b]$ :

1)  $\forall t \in [a,b] : |x(t) - y(t)| \geq 0 \Rightarrow \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \geq 0 \Rightarrow \bar{d}(x,y) \geq 0$

2)  $\bar{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \forall t \in [a,b] : |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b] : x(t) - y(t) = 0$   
 $\Leftrightarrow \forall t \in [a,b] : x(t) = y(t) \Leftrightarrow x = y$

3)  $\bar{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b |y(t) - x(t)| dt = \bar{d}(y,x)$

4)  $\forall t \in [a,b] : |x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$

$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \leq \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt \quad \bar{d}(x,y) \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$

$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \quad X \neq \emptyset \quad (9Q)$   
 def  $\Leftrightarrow x = y$

1)  $d(x,y) \in \{0,1\} \Rightarrow d(x,y) \geq 0$  - 2)  $d(x,y) = 0$

3)  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow d(y,x) = 0 \quad d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y \Leftrightarrow y \neq x \Leftrightarrow d(y,x) = 1 \quad d(x,y) = d(y,x)$

جواباً (4)

4)  $1 \leq 0 + 0$

$d(x,y) = 1 \iff x \neq y$

مقبولة

$d(x,z) = 0 \iff x = z$

$d(z,y) = 0 \iff z = y$

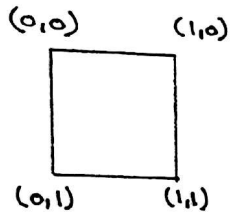
وهذا تناقض

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$X = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$  (10Q)

$x = (\xi_1, \xi_2) \quad y = (\eta_1, \eta_2) \quad (x,y) \mapsto d(x,y) = \text{Card } \{i : \xi_i \neq \eta_i\}$

$X \ni z = (\xi_1, \xi_2)$  ليكن



1)  $d(x,y) \in \{0,1,2\} \quad d(x,y) \geq 0$

2)  $d(x,y) = 0 \iff \text{Card } \{i : \xi_i \neq \eta_i\} = 0 \iff \forall i \in \{1,2\} \xi_i = \eta_i \iff (\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2)$

3)  $d(x,y) = \text{Card } \{i : \xi_i \neq \eta_i\} = \text{Card } \{i : \eta_i \neq \xi_i\} = d(y,x)$

4) ليكن  $j \in \{1,2\}$  حيث  $\xi_j \neq \eta_j$  وليكن  $i \in \{1,2\}$  حيث  $\xi_i = \eta_i$

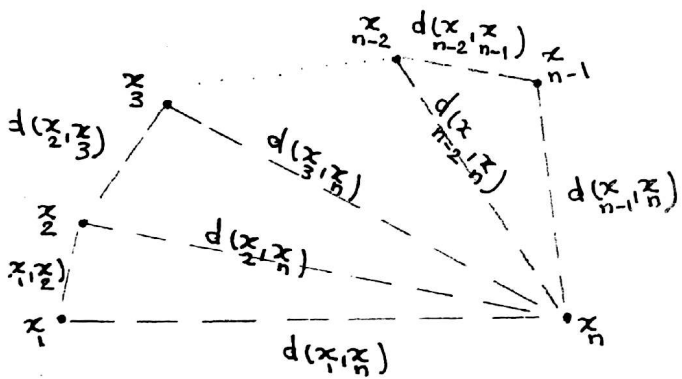
$j \in \{i : \xi_i \neq \eta_i\}$

أي  $\xi_j \neq \eta_j$  أو  $j \in \{i : \xi_i \neq \eta_i\}$  أي  $\xi_j \neq \eta_j$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$X = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \{0,1\}\}$  عمم

$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$  (11Q)



$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_n)$

$\leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_n)$

$\dots$

$\leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$

$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$  (12Q)

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$

$\Rightarrow d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(y,w)$  [1]

$d(z,w) \leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,w)$

$\Rightarrow d(z,w) - d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,w)$  [2]

من [1] و [2] نجد أن:

$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$

تذكر:

$|a| \leq b \iff$

حيث  $b \geq 0$

$-a \leq b$  و  $a \leq b$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y) \quad [1]$$

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y) \quad [2]$$

من [1] و [2] نجد أن:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) \quad (*) \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (14Q)$$

عند  $z = y$  في (\*):

$$d(x,y) \leq d(y,x) + d(y,y) \stackrel{r_1}{=} d(y,x) + 0 \Rightarrow d(x,y) \leq d(y,x) \quad [1]$$

$$(*) \quad d(y,x) \leq d(z,y) + d(z,x) \quad \text{عند } z = x \text{ في } (*):$$

$$d(y,x) \leq d(x,y) + d(x,x) \stackrel{r_1}{=} d(x,y) + 0 \Rightarrow d(y,x) \leq d(x,y) \quad [2]$$

من [1] و [2] نجد أن:  $d(x,y) = d(y,x)$

$$(*) \quad d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

$$r_1 \Leftrightarrow r_2 + r_3 + r_4 \quad (15Q)$$

$$r_2 \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow \underset{x=y}{0} = d(x,x) \leq d(x,z) + d(z,x) \stackrel{r_1}{=} 2d(x,z)$$

ومنه  $d(x,z) \geq 0$

p.19

$$\left( |x_1| + \dots + |x_n| \right)^2 \leq n \left( |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \right) \quad (3Q)$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{m=1}^n |1|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نأخذ  $\eta_i = 1, 1 \leq i \leq n$  في:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n}$$

بالتربيع:

$$\left( |x_1| + \dots + |x_n| \right)^2 \leq n \left( |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)$$

(4Q) لتكن  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  صيغة:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2^2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3^3} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n^n}$

من الواضح أن  $x \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow +\infty$

ليكن  $1 \leq p < +\infty$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{3}{3^p} + \frac{4}{4^p} + \dots + \frac{n}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^p}$$

هذه السلسلة تتقارب عندما  $n \rightarrow +\infty$  لأي  $1 \leq p < +\infty$  ومنه استنتجنا  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  متباعدة لأي  $1 \leq p < +\infty$

وبالتالي  $x \notin l^p$  لأي  $1 \leq p < +\infty$

(5Q) لنأخذ السلسلة  $x = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ، نلاحظ أن  $x \in l^p$  لأي  $p > 1$  لأن

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \text{ لأي } p > 1 \text{ ، و } x \notin l^1 \text{ لأن } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ متباعدة .}$$

تذكر أن السلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  متقاربة عندما  $\alpha > 1$  متباعدة عندما  $\alpha \leq 1$

$$\delta(A) \leq \delta(B) \iff A \subseteq B \quad \delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \quad (6Q)$$

لنأخذ  $A \subseteq B$  ، كان  $\{d(a, \bar{a}) : a, \bar{a} \in A\} \subseteq \{d(b, \bar{b}) : b, \bar{b} \in B\}$  ، ومنه

$$\delta(A) \leq \delta(B) \text{ أي : } \sup \{d(a, \bar{a}) : a, \bar{a} \in A\} \leq \sup \{d(b, \bar{b}) : b, \bar{b} \in B\}$$

$$A = \{x\} \iff \delta(A) = 0 \quad (7Q)$$

$$: A = \{x\} \implies$$

$$\delta(A) = 0 \iff \sup_{x,y \in A} d(x,y) = 0 \iff d(x,y) = d(x,x) = 0 : \delta(A) = 0 \iff$$

$$A = \{x\} \iff x=y \iff d(x,y) = 0 \quad x,y \in A \iff \sup_{x,y \in A} d(x,y) = 0$$

(8Q) - يمكن  $(\mathbb{R}, d)$  حيث  $d(x,y) = |x-y|$  و  $A = [-1,1]$  ،  $B = ]0,2]$  من الواضح أن  $A \not\subseteq B$  لكن  $D(A,B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b) = 0$

نماذج  $A \cap B \neq \emptyset$  يوجد  $c \in X$  واصل على الأقل بحيث  $c \in A \cap B$  ومنه  $c \in A$  و  $c \in B$

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) = d(c, c) = 0$$

فإن  $(\mathbb{R}, d)$  و  $A = [-1, 0]$   $B = ]0, 2]$  نلاحظ أنّ  $A \cap B = \emptyset$  لكن  $D(A, B) = 0$

(10Q) ليكن  $x, y \in X$  لأي  $b \in B$  فإنّ  $d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b) \leq d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$  لنا  $d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, b)$  لأي  $b \in B$  ومنه:

$$d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B)$$

$$d(x, B) - d(y, B) \leq d(x, y) \quad [1]$$

بالتبادلة بين  $x$  و  $y$  وإعادة المناقشة السابقة السابقة، نحصل على: [2]  $d(y, B) - d(x, B) \leq d(x, y)$  من [1] و [2] نجد أنّ:

$$|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$$

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

مضاد مترى  $(X, d)$

(11Q)

$$1) d(x, y) \geq 0 \quad \& \quad 1 + d(x, y) \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0 \Rightarrow \bar{d}(x, y) \geq 0$$

$$2) \bar{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) \bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \bar{d}(y, x)$$

$$4) \bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

$$\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y)$$

$$0 \leq d(x, y) < 1 + d(x, y) \Rightarrow 0 \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1 \Rightarrow 0 \leq \bar{d}(x, y) < 1$$

لأي  $x, y \in X$  فإنّ:

$$\sup_{x, y \in X} \bar{d}(x, y) = 1 \Rightarrow \delta(X) = 1$$

$$\delta(A \cup B) < +\infty \iff \delta(B) < +\infty \text{ , } \delta(A) < +\infty \quad (12Q)$$

ليكن  $a \in A$  ,  $b \in B$  عنصرين شئيين , و  $x, y$  عنصرين كئيين من  $A \cup B$  , نبيء الحالات التالية :

1)  $x, y \in A$  :  $d(x, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$

2)  $x, y \in B$  :  $d(x, y) \leq \delta(B) + d(a, b) + \delta(A)$

3)  $x \in A$  ,  $y \in B$  :  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$

4)  $y \in A$  ,  $x \in B$  :  $d(x, y) \leq d(x, b) + d(b, a) + d(a, y) \leq \delta(B) + d(a, b) + \delta(A)$

نبيء  $x, y \in A \cup B$  فائء :  $d(x, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$  ومنه :

$$\delta(A \cup B) = \sup_{x, y \in A \cup B} d(x, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B) < +\infty$$

بالتالي  $A \cup B$  مجموعة محدودة

$x = (x_1, x_2)$  ,  $y = (y_1, y_2)$  ,  $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$  ,  $X = X_1 \times X_2$  ,  $(X_2, d_2)$  ,  $(X_1, d_1)$  (13Q)

أيء كان  $x = (x_1, x_2)$  ,  $y = (y_1, y_2)$  و  $z = (z_1, z_2) \in X$

1)  $d_i(x_i, y_i) \geq 0 \quad i=1,2 \Rightarrow d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$

2)  $d(x, y) = 0 \iff d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = 0 \iff d_i(x_i, y_i) = 0 \quad i=1,2 \iff x_i = y_i \quad i=1,2 \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff x = y$

3)  $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) = d(y, x)$

4)  $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) = d_1(x_1, z_1) + d_2(x_2, z_2) + d_1(z_1, y_1) + d_2(z_2, y_2) = d(x, z) + d(z, y)$

$$\bar{d}(x, y) = \left[ d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14Q)$$

1)  $d_i(x_i, y_i) \geq 0 \quad i=1,2 \Rightarrow d_i(x_i, y_i)^2 \geq 0 \quad i=1,2 \Rightarrow d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \geq 0 \Rightarrow \left[ d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$   
 $\bar{d}(x, y) \geq 0$

2)  $\bar{d}(x, y) = 0 \iff \left[ d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \iff d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 = 0 \iff d_i(x_i, y_i) = 0 \quad i=1,2 \iff x_i = y_i \quad i=1,2 \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff x = y$

3)  $\bar{d}(x, y) = \left[ d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ d_1(y_1, x_1)^2 + d_2(y_2, x_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{d}(y, x)$

4) لنفرض جدءا يوجد  $z = (z_1, z_2) \in X$  كئيب :  $\bar{d}(x, y) > \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y)$  أيء :

$$\left[ d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} > \left[ d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(z_2, y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

بالتربيع

$$(*) d_1(x,y)^2 + d_2(x,y)^2 > d_1(x,z)^2 + d_2(x,z)^2 + d_1(z,y)^2 + d_2(z,y)^2 + 2 \left[ d_1(x,z)^2 + d_2(x,z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ d_1(z,y)^2 + d_2(z,y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_1(x,z) d_1(z,y) + d_2(x,z) d_2(z,y) > \left[ d_1(x,z)^2 + d_2(x,z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ d_1(z,y)^2 + d_2(z,y)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$2 d_1(x,z) d_2(z,y) d_1(z,y) d_2(x,z) > d_1(x,z)^2 d_2(z,y)^2 + d_1(z,y)^2 d_2(x,z)^2$$

$$0 > \left( d_1(x,z) d_2(z,y) - d_1(z,y) d_2(x,z) \right)^2$$

وهذا خلف ومنه الفرض الجدي خاطئ ومتباينة التمثل محققة لأي  $x, y, z$  من  $X$

$$\bar{d}(x,y) = \max \{ d_1(x,y), d_2(x,y) \}$$

(15Q)

$$1) d_i(x,y) \geq 0 \quad i=1,2 \Rightarrow \max \{ d_1(x,y), d_2(x,y) \} \geq 0 \Rightarrow \bar{d}(x,y) \geq 0$$

$$2) \bar{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max \{ d_1(x,y), d_2(x,y) \} = 0 \Leftrightarrow d_i(x,y) = 0 \quad i=1,2 \Leftrightarrow x_i = y_i \quad i=1,2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x = y$$

$$3) \bar{d}(x,y) = \max \{ d_1(x,y), d_2(x,y) \} = \max \{ d_1(y,x), d_2(y,x) \} = \bar{d}(y,x)$$

$$4) \bar{d}(x,y) = \max \{ d_1(x,y), d_2(x,y) \} \leq \max \{ d_1(x,z) + d_1(z,y), d_2(x,z) + d_2(z,y) \} \\ \leq \max \{ d_1(x,z), d_2(x,z) \} + \max \{ d_1(z,y), d_2(z,y) \} \\ \leq \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$$

p.30

(أ) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة

(16Q)

لنأخذ الكرة المفتوحة:  $B(a,r) = \{ x \in X : d(x,a) < r \}$  حيث  $r > 0$

$$r_0 = d(x_0, a) < r \Leftrightarrow x_0 \in B(a,r)$$

لنأخذ الكرة المفتوحة:  $B(x_0, \frac{r-r_0}{2}) = \{ x \in X : d(x, x_0) < \frac{r-r_0}{2} \}$  حيث  $B(x_0, \frac{r-r_0}{2}) \subset B(a,r)$

وذلك لأن إذا كان  $y \in B(x_0, \frac{r-r_0}{2})$  كان  $d(y, x_0) < \frac{r-r_0}{2} < r - r_0$  كان

مب متباينة التمثل:

$$y \in B(a,r) \Leftrightarrow d(y,a) < r \Leftrightarrow d(y,a) \leq d(y, x_0) + d(x_0, a) < r - r_0 + r_0 = r$$

تحتوي الكرة المفتوحة  $B(a,r)$  كرة مفتوحة  $B(x_0, \frac{r-d(x_0,a)}{2})$  حول كل نقطة فيها  $x_0$ ، وبالتالي

$B(a,r)$  مجموعة مفتوحة

(ب) كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة

لنأخذ الكرة المغلقة:  $\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$  حيث  $r > 0$

ليكن  $x_0 \in \bar{B}(a, r)$   $\Leftrightarrow r_0 = d(x_0, a) > r$

لنأخذ الكرة المفتوحة:  $B(x_0, \frac{r-r_0}{2}) = \{x \in X : d(x, x_0) < \frac{r-r_0}{2}\}$  إن  $B(x_0, \frac{r-r_0}{2}) \subseteq \bar{B}(a, r)$  وذلك لأن إذا كانت  $y \in B(x_0, \frac{r-r_0}{2})$  كان  $d(y, x_0) < \frac{r-r_0}{2} < r_0 - r \Leftrightarrow d(y, a) > r - r_0$   $\Leftrightarrow d(y, a) < \frac{r-r_0}{2} < r_0 - r$   $\Leftrightarrow d(y, a) < r$   $\Leftrightarrow y \in \bar{B}(a, r)$   $\Leftrightarrow \bar{B}(a, r)$  مجموعة مغلقة.

$d(x_0, a) \leq d(x_0, y) + d(y, a) \Rightarrow d(y, a) \geq d(x_0, a) - d(x_0, y) = r_0 - d(x_0, y) > r_0 + r - r_0 = r$   
 تحوي المجموعة  $\bar{B}(a, r)$  كرة مفتوحة  $B(x_0, \frac{d(x_0, a) - r}{2})$  حول كل نقطة  $x_0$  منها، لذا  $\bar{B}(a, r)$  مجموعة مغلقة، وبالتالي  $\bar{B}(a, r)$  مجموعة مغلقة.

$$y(t) = \cos t \quad x(t) = \sin t \quad d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t) - y(t)| \quad C[0, 2\pi] \quad (3Q)$$

$$|\sin t - \cos t| = \sqrt{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right| = \sqrt{2} \left| \sin t \cos \frac{\pi}{4} - \cos t \sin \frac{\pi}{4} \right| = \sqrt{2} \left| \sin(t - \frac{\pi}{4}) \right|$$

يبلغ المقدار  $|\sin(t - \frac{\pi}{4})|$  أكبر قيمة ممكنة في الفترة  $[0, 2\pi]$  عندما:

$$\text{إما } \sin(t_1 - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow t_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{أو } \sin(t_2 - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow t_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{4}$$

إذن يبلغ المقدار  $|\sin t - \cos t|$  أكبر قيمة ممكنة عندما  $t = t_1$  أو  $t = t_2$  وتساوي  $\sqrt{2}$ ، وبالتالي:  $d(x, y) = \sqrt{2}$  ( $r \geq \sqrt{2}$ )

$$A \text{ مفتوحة} \Leftrightarrow A \text{ اجتماع لكرات مفتوحة} \quad (4Q)$$

لنفرض أن  $A$  مجموعة مفتوحة:

لأعي  $a \in A$  توجد كرة مفتوحة  $B(a, \epsilon)$  (للأطهر  $\epsilon > 0$  مناسب) حيث  $B(a, \epsilon) \subseteq A$ ، و:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon)$$

بالتالي  $A$  اجتماع لكرات مفتوحة.

لنفرض أن  $A$  اجتماع لكرات مفتوحة:

مب الطلب (أ) من (IQ) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، ونعلم أن أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة، وبالتالي  $A$  مجموعة مفتوحة.

$$(5Q) \quad (A) \quad X, \phi \text{ مفتوحة ومغلقة في } A \text{ واحد.}$$

$$\forall x \in \phi \quad \exists \epsilon > 0 \quad B(x, \epsilon) \subseteq \phi$$

وهذه العلاقة صحيحة وضوحاً نظراً لأنه لا يوجد  $x$  في  $\phi$

ومنه  $\phi$  مجموعة مفتوحة، وبالتالي  $X$  مجموعة مغلقة

$$\forall x \in X \quad \exists \epsilon > 0 \quad B(x, \epsilon) \subseteq X$$

منقطة وصحفاً، ومنه  $X$  مجموعة مفتوحة وبالتالي  $\phi$  مجموعة مغلقة  
(ب) لتكن  $A \subseteq X$ ، نريد ما ليتين:

- 1-  $A = \phi$  أو  $A = X$  فإن  $A$  مفتوحة ومنقطة في آن واحد (مب الطلب (أ))
- 2-  $\phi \neq A \neq X$  فإن  $A^c \neq \phi$ .

لأي  $a \in A$  توجد الكرة المفتوحة  $A \ni \{a\} \subseteq B(a, \frac{1}{2})$  لذا  $A$  مفتوحة، ومنه  $A^c$  مغلقة  
بإعادة نفس المناقشة لـ  $A^c$  نرى أن  $A^c$  مفتوحة و  $A$  مغلقة

(6Q) لنفرض مؤقتاً وجود جوار  $V$  لـ  $x$  - تحوي عدداً منتهياً من نقاط  $A$ ، أي:  $A \cap V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$   
لشأن كانت  $x$  نقطة تراكم للمجموعة  $A$  كان  $(V - \{x\}) \cap A \neq \phi$  لأي جوار  $V$  لـ  $x$   
ليكن  $\delta = \min \{ |x - a_i| : x \neq a_i \}$ ، عندئذٍ  $\delta > 0$  ومنه  $B(x, \frac{\delta}{2})$  جوار مفتوح لـ  $x$ ، لتكن:  
 $(B(x, \frac{\delta}{2}) - \{x\}) \cap A = \phi$  ومنه  $x$  ليست نقطة تراكم للمجموعة  $A$  وهذا خلف، ومنه الضرب  
الجدي خاطئ، لذا أي جوار لـ  $x$  تحوي عدداً غير منتهياً من نقاط  $A$ .

$$(7Q) \quad (أ) \mathbb{Z} \quad (ب) \mathbb{R} \quad (ج) \phi \quad (د) \{z : |z| \leq 1\}$$

$$(8Q) \quad \text{نأخذ} \quad \delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \delta)$$

$$(x, y) \mapsto \delta(x, y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

$$B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : \delta(x, 0) < 1\} = \{0\} \quad \text{نأخذ الكرة المفتوحة:}$$

$$\overline{B(0, 1)} = \overline{\{0\}} = \{0\} \quad \text{مفتوحة ومنقطة في آن واحد، لذا:}$$

$$\overline{B(0, 1)} = \{x \in \mathbb{R} : \delta(x, 0) \leq 1\} = \mathbb{R} \quad \text{نأخذ الكرة المنقطة:}$$

$$\overline{B(0, 1)} \neq \overline{B(0, 1)} \quad \text{نلاحظ آتت:}$$

$$\overline{B(x, \epsilon)} \subseteq \overline{B(x, \epsilon)} \quad \text{برهن آتت:}$$

$$(9Q) \quad A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$: A \subseteq \overline{A} \quad (0)$$

p. 26 إن  $\overline{A}$  أصغر مجموعة مغلقة تحوي  $A$ ، لذا  $A \subseteq \overline{A}$

لتكن  $x \in A$  فإن  $(x, x_1, \dots)$  متتالية من  $x$ ، ومنه  $x \in \overline{A}$ ، لذا  $A \subseteq \overline{A}$

لتكن  $x \in A$ ، وأياً كانت الجوار  $V$  لـ  $x$  فإن  $\{x\} \subseteq A \cap V \neq \phi$ ، ومنه  $x \in \overline{A}$ ، لذا  $A \subseteq \overline{A}$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \quad (0)$$

إن  $\overline{\overline{A}}$  أصغر مجموعة مغلقة تحوي  $\overline{A}$ ، ولشأن كانت  $\overline{A}$  مجموعة مغلقة، كان  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (10)$$

$$(11) \quad \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases} \text{ لدينا:}$$

إتت  $\overline{A \cup B}$  مجموعة مغلقة تحوي  $A \cup B$ , لأن  $\overline{A \cup B}$  أصغر مجموعة مغلقة تحوي  $A \cup B$ , لذا:  $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B} \quad \text{من (11) و (2) نجد أن:}$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \quad (12)$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases} \text{ لدينا:}$$

هات مثالاً:

$$(\mathbb{R}, 1, 1) \quad \overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = [0, 1[ \quad B = [1, 2[ \quad A \cap B = \emptyset \quad \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \\ \overline{A} = [0, 1] \quad \overline{B} = [1, 2] \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \end{array} \right\} \quad \emptyset \subsetneq \{1\}$$

$$D(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \quad (10Q)$$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon \Leftrightarrow \inf_{a \in A} d(x, a) = 0 \Leftrightarrow D(x, A) = 0$$

$$\{z : |z| = 1\} \text{ (ج)} \quad \mathbb{R} \text{ (ب)} \quad \{-1, 1\} \text{ (أ)} \quad (11Q)$$

$$d(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad \text{المضاد } B[a, b] \text{ غير فضول} \quad (12Q)$$

$$f_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_c(t) = \begin{cases} 1 & : t = c \\ 0 & : t \neq c \end{cases}$$

من الواضح أن  $f_c$  للذي  $c \in [a, b]$  محدود على  $[a, b]$  لأن  $f_c(t) \leq 2$  حيث  $t \in [a, b]$  ولأنه  $f_c \in B[a, b]$  للذي  $c \in [a, b]$  (أي لتقابل كل عدد حقيقي  $c$  من الفترة  $[a, b]$  بدالة  $f_c$  محددة على  $[a, b]$ )

لكن  $M = \{f_c : c \in [a, b], t \in [a, b]\} \subset B[a, b]$  ليست مجموعة  $[a, b]$  غير معدودة كانت المجموعة  $M$  غير معدودة، وإنما كان  $f_c, f_d \in M$  حيث  $c \neq d$  كان  $d(f_c, f_d) = 1$

لتفرض أن  $D$  مجموعة جزئية كثيفة في  $B[a, b]$ ، ولنظري بمساعدة التلات المفتوحة غير المتقاطعة:

$$S = \{B(f_c, \frac{1}{3}) : f_c \in M\}$$

لتما كانت  $D$  كثيفة في  $B[a, b] \rightarrow$  تتقاطع  $D$  مع كل كرة مفتوحة من كرات الجامعة  $S$ , أي تحوي  $D$

عضر  $x$  للذي  $c \in [a, b]$  - (واصدا على الأقل) لذلك تتكون  $D$  غير معدودة.

نتج أن أي مجموعة كثيفة في المضاد  $B[a, b]$  لابد أن تكون غير معدودة، بالتالي المضاد  $B[a, b]$

غير فضول.

(13Q)  $X$  فضول  $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in Y d(x,y) < \epsilon$   
 لنفرض أن  $X$  فضول:

تحتوي  $X$  مجموعة جزئية عدودة وكثيفة  $Y$ . ليكن  $x \in X$  و  $\epsilon > 0$ ، لتأكدت  $Y$  كثيفة في  $X$  كان  $\bar{Y} = X$  ومنه  $x \in \bar{Y}$ ، لذا يوجد الجوار  $B(x, \epsilon) \cap Y \neq \emptyset$  و  $d(x,y) < \epsilon$ .  
 لنفرض أن الطرف الثاني صحيح:

كل  $x \in X$  هي نقطة تجمع لـ  $Y$ ، لذا  $\bar{Y} = X$  وبالتالي  $X$  فضول

(14Q)  $T: X \rightarrow Y$  متر  $\Leftrightarrow M$  منقطة في  $Y \Leftrightarrow T^{-1}(M)$  منقطة في  $X$

لتأكد  $M$  مجموعة منقطة في  $Y$  نأخذ  $M^c$  مجموعة مفتوحة في  $Y$ ، وكون  $T$  متر نأخذ  $T^{-1}(M^c)$  مجموعة مفتوحة في  $X$ ، ولدينا  $T^{-1}(M^c) = (T^{-1}(M))^c$  أي  $T^{-1}(M)$  مجموعة مفتوحة في  $X$  وبالتالي  $T^{-1}(M)$  مجموعة منقطة في  $X$ .

$\Rightarrow$  لتأكد  $V$  مجموعة مفتوحة في  $Y$  نأخذ  $V^c$  مجموعة منقطة في  $Y$ ، ومنه  $T^{-1}(V^c)$  مجموعة منقطة في  $X$ ، ولدينا:  $T^{-1}(V^c) = (T^{-1}(V))^c$  أي  $T^{-1}(V)$  مجموعة منقطة في  $X$  ومنه  $T^{-1}(V)$  مجموعة مفتوحة في  $X$ ، وبالتالي  $T$  متر

(15Q)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x) = x^2$

$A = ]-1, 1[$  مفتوحة في  $\mathbb{R}$  (المطلق)  $f(A) = ]0, 1[$  ليست مفتوحة في  $\mathbb{R}$  (المتر).

p. 41

(1Q) تذكر تعريف المتتالية الجزئية:

لتأكد  $X$  مجموعة مايز فالية و  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر  $X$ ، يقال إن  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية من المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  إذا وجدت دالة متزايدة تماماً:  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto \varphi(n)$   
 حيث يكون:  $y = x_{\varphi(n)}$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon \Rightarrow \forall n_k \geq N : d(x_{n_k}, x) < \epsilon$

(2Q) ليكن  $\epsilon > 0$ ، لتأكد المتتالية الجزئية  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة من  $x$ ، فيوجد  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  حيث لأي  $k > N(\epsilon)$  نأخذ:  $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$

المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  كوشيية، لذا يوجد  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  حيث لأي  $n, m > N(\epsilon)$  نأخذ:  $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$

X (13Q)   
 ~~المتردد~~

ليكن  $\{n_k(\epsilon), N(\epsilon)\}$  و  $k > K(\epsilon)$  عندئذٍ:  $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

(4Q) لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي في  $(X, d)$ ، نثبت:  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$

لنأخذ  $\epsilon = 1$  يوجد  $N$  بحيث:  $m, n \geq N : d(x_m, x_n) < 1$

ومنه يمكن كتابة:  $n \geq N : d(x_n, x_n) < 1$

أي جميع عناصر المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  التي يكون فيها  $n \geq N$  تقع:  $d(x_n, x_n) < 1$

لنأخذ:  $L = \max \{d(x_i, x_j) : i, j = 1, \dots, N-1\} \cup \{1\}$

عندئذ قوي الكرة المفتوحة  $B(x_N, L+1)$  جميع عناصر المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، وبالتالي المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة

(5Q) لنأخذ المتتالية  $a_n = (-1)^n$  في  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  من الواضح أن هذه المتتالية محدودة، ولكننا لنرى كوشي

لنأخذ  $\epsilon = \frac{1}{2}$  ولنفرض مؤقتاً وجود  $N \in \mathbb{N}$  بحيث:  $m, n \geq N : |a_m - a_n| < \frac{1}{2}$

ليكن  $m$  و  $n$  أكبر من  $N$  الأول زوجي والثاني فردي، نرى أن:  $|1 - (-1)| = 2 < \frac{1}{2}$    
 متناقض

(6Q)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  كوشي  $a_n = d(x_n, y_n)$   $n \in \mathbb{N}$

$\forall \epsilon > 0 \exists N_x \in \mathbb{N} : m, n \geq N_x \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$    
  $\exists N_y \in \mathbb{N} : m, n \geq N_y \Rightarrow d(y_m, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$    
 ليكن  $N = \max \{N_x, N_y\}$ ، نأخذ  $m, n \geq N$  نثبت:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) < \epsilon \\ d(x_m, y_m) &\leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) \Rightarrow d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) < \epsilon \\ &\Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon \end{aligned}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  كوشي في فضاء تام  $\mathbb{R}$  فهي متقاربة

p. 51

(1Q) لنأخذ  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر المجموعة  $[a, b]$  متقاربة من  $[a, b]$ ، لنا الفترة  $[a, b]$  ليست مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المترى التام  $\mathbb{R}$ ، فب-1، 4، 7 إثبات  $[a, b]$  فضاء جزئي غير تام من  $\mathbb{R}$ .

إثبات  $[a, b]$  مجموعة مغلقة من الفضاء المترى التام  $\mathbb{R}$ ، فب-1، 4، 7 إثبات  $[a, b]$  فضاء جزئي تام من  $\mathbb{R}$ .

(3Q) لنأخذ المتتالية:  $x_1 = (1, 0, \dots, 0), x_2 = (1, \frac{1}{2}, \dots, 0), \dots, x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$

إثبات  $x_n \in M$  لأي  $n \in \mathbb{N}$  حيث  $M$  هي مجموعة  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي، بفرض  $m > n$  نثبت:

$$\begin{aligned} x_n &= (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots) \quad x_m = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots) \\ d(x_n, x_m) &= \text{Sup} \left\{ |1-1|, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|, \dots, \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right|, \left| 0 - \frac{1}{n+1} \right|, \dots, \left| 0 - \frac{1}{m} \right|, |0-0|, \dots \right\} = \frac{1}{n+1} \quad m > n \end{aligned}$$

كانت  $n > m$  كان  $d(x_n, x_m) = \frac{1}{m+1}$  في كلا الحالتين:  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$   $n, m \rightarrow +\infty$

لذا  $(x_n)$  متتالية كوشي، لكننا غير متقاربة في  $M$ ، لذلك  $n \in \mathbb{N}$

$x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots) \rightarrow x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \notin M$   
 بالتالي  $M$  فضاء جزئ تام

(5Q) إثبات  $\mathbb{Z}$  مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المترى التام  $\mathbb{R}$ ، حيث  $d(x, y) = |x - y|$  في  $\mathbb{Z}$  فضاء مترى تام

(6Q) إثبات أن  $d$  ترك على  $\mathbb{R}$ ، لأي  $x, y, z$  من  $\mathbb{R}$ :

1)  $|\arctan(x) - \arctan(y)| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$

2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) - \arctan(y) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) = \arctan(y) \Leftrightarrow x = y$   
 مبيّن  $\arctan$

3)  $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan(y) - \arctan(x)| = d(y, x)$

4)  $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| = d(x, z) + d(z, y)$

تذكر أن: إذا كانت  $(X_1, d_1)$  و  $(X_2, d_2)$  ايزومتريين، فإن:  $(X_1, d_1) \Leftrightarrow (X_2, d_2)$  تام

نأخذ  $T: (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow (]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, d_2)$  حيث  $d_1(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$   $x \mapsto Tx = \arctan(x)$   
 $d_2(x, y) = |x - y|$

لأن التطبيق  $T$  متباين وغامر، كما أن  $T$  لأي  $x, y \in \mathbb{R}$  فإن  $Tx, Ty \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ، و:

$d_1(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$   $d_2(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

التطبيق  $T$  ايزومتري، وبالتالي  $(\mathbb{R}, d_1)$  و  $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, d_2)$  ايزومتريان، وبالتالي الفضاء  $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, d_2)$  جزئ تام، وبالتالي  $(\mathbb{R}, d_1)$  جزئ تام

$\exists T: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$

برهان تذكر أن:  $(X_1, d_1)$  و  $(X_2, d_2)$  ايزومتريان:

$\forall x, y \in X_1$   $d_1(x, y) = d_2(Tx, Ty)$   $T$  متباين وغامر

لنفرض أن  $(X_1, d_1)$  تام، لنبرهن أن  $(X_2, d_2)$  تام

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow d_2(y_n, y_m) < \epsilon$

لنأخذ  $(y_n)$  متتالية كوشي من عناصر  $X_2$ ، فإن:  $n \in \mathbb{N}$

لما كان التطبيقتين  $T$  تقابلت فوات  $(x_n = T^{-1}y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر  $X_1$ ، وكون  $T$  ايزومتري

نات:  $\forall n, m \in \mathbb{N} : d_1(x_n, x_m) = d_2(y_n, y_m)$

لنا  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي من عناصر  $X_1$ ، لانت:  $\exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow d_1(x_n, x_m) = d_2(y_n, y_m) < \epsilon$

لما كان  $X_1$  تاماً، نانت المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة من عنصر من  $X_1$ ، ولنفرس  $x \in X_1$ ، أي:  $d_1(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

كون  $T$  ايزومتري، فوات:  $d_2(y_n, Tx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  والمتتالية  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة، وبالتالي  $(X_2, d_2)$  تام

(7Q) بالمثل:  $T: (Z, d_1) \rightarrow (A, d_2)$   
 $z \mapsto Tz = \frac{1}{z}$

$d_1(z_1, z_2) = \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right|$   
 $d_2(a_1, a_2) = |a_1 - a_2|$   
 $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

$(A, d_2)$  غير تام  $\Leftarrow (Z, d_1)$  غير تام

(8Q) حسب البرهنة 1-4-7 يكفي بيان انت  $\gamma$  مغلق. لكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر  $\gamma$  متقاربة من  $y$

لنرهن انت  $\gamma \in \gamma$  قيم المطلوب.

$\forall n \in \mathbb{N} : x_n(a) = x_n(b) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(b) \Rightarrow y(a) = y(b)$

$\gamma \in \gamma$ ، ومنه  $\gamma$  مغلق، وبالتالي  $\gamma$  فضاء تام

p.60

(5Q)  $X, \gamma$  ايزومتريان  $\Leftarrow$  متباين وفامر  $\exists T: (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$

$\forall x, y \in X : d_x(x, y) = d_y(Tx, Ty)$

كجيب بيان انت  $T$  و  $T^{-1}$  متران:

لتن  $x_0$  نقطة كيفية من  $X$ ، فوات:  $d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(Tx, Tx_0) < \epsilon$  نظراً لانت  $d_x(x, x_0) = d_y(Tx, Tx_0)$  كون  $T$  ايزومتري.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \epsilon > 0 : d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(Tx, Tx_0) < \epsilon$

$\Leftarrow$   $T$  متر عند  $x_0$  الكيفية، وبالتالي  $T$  متر على  $X$  (بالسند للجد  $T^{-1}$ )

(ب)  $T: (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow \left( ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , d_2 \right)$  تصاكل

متر، متباين وفامر وعلمه متر  $x \mapsto Tx = \arctan(x)$

(ليس يفظ للمافة)

$$T: C[0,1] \rightarrow C[a,b] \quad (5Q)$$

$$f \mapsto (Tf)(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad x \in [a,b]$$

T متباين:

$$\forall f, g \in C[0,1] : Tf = Tg \Rightarrow (Tf)(x) = (Tg)(x) \quad x \in [a,b] \Rightarrow f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow f(y) = g(y) \quad : y \in [0,1] \Rightarrow f = g \quad x \in [a,b]$$

T غامر:

ليكن  $g \in C[a,b]$  نأخذ  $y \in [0,1]$  نلاحظ ان  $f(y) = g(a + y(b-a))$  كما ان  $f \in C[0,1]$

$$(Tf)(x) = g\left(a + \frac{x-a}{b-a}(b-a)\right) = g(x)$$

T تحافظ للمساواة:

$$\forall f, h \in C[0,1] : Tf, Th \in C[a,b] \quad d(Tf, Th) = \max_{a \leq x \leq b} |(Tf)(x) - (Th)(x)|$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} \left| f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| = \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y) - h(y)| = d(f, h)$$

(7Q) لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي في الفضاء  $(X, d)$  أي  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$$\frac{d(x_n, x_m)}{1 + d(x_n, x_m)} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon + \varepsilon d(x_n, x_m) \Rightarrow (1 - \varepsilon) d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\text{نأخذ } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < 1 - \varepsilon < 1 \text{ ومنه: } d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\text{لذلك } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \text{ يوجد } N \in \mathbb{N} \text{ حيث لأي } n, m \geq N \text{ فإن: } d(x_n, x_m) < 2\varepsilon$$

أي  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي في الفضاء  $(X, d)$  تام  $\Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة من عنصر  $x \in X$ ، لذا:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, \text{ ومنه: } d(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \rightarrow \frac{0}{1 + 0} = 0 \text{ أي } x_n \xrightarrow{d} x \text{ بالتالي } (X, d) \text{ تام}$$

$$x'_n \rightarrow L \Leftrightarrow x_n \rightarrow L \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x'_n, x_n) = 0 \quad (9Q)$$

$$d(x'_n, L) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, L) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x'_n, L) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x'_n, x_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, L) = 0 + 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x'_n, L) = 0 \Rightarrow x'_n \rightarrow L$$

$x \in [a, b]$   
(60)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0 \iff (x_n) \sim (y_n) \quad (10Q)$$

انكافية، تناظرية ومتعدية.

(~) انكافية: لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية ما، فثبت:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_n) = 0$ ، ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_n) = 0 \quad \text{بالتالي:} \quad (x_n) \sim (x_n)$$

(~) تناظرية: لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليتين، فثبت:  $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$  لأي  $n \in \mathbb{N}$ ، ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n, x_n) = 0$$

وبالتالي  $(y_n) \sim (x_n)$

(~) متعدية: لتكن كل من  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ،  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليات، حيث:  $(x_n) \sim (y_n)$  و  $(y_n) \sim (z_n)$  أي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n, z_n) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n, z_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, z_n) = 0$$

بالتالي  $(x_n) \sim (z_n)$

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \quad (E, \|\cdot\|) \text{ ف. منظم} \quad (3Q)$$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (*)$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \quad (*')$$

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \quad \text{من } (*) \text{ و } (*') \text{ نجد:}$$

(11Q)

$$x, y \in \bar{B}(0, 1) : \|x\| \leq 1 \quad \|y\| \leq 1 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\|$$

$$= |\lambda| \cdot \|x\| + |(1-\lambda)| \cdot \|y\| = \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \Rightarrow \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{B}$$

$$2 \in \mathbb{R} \quad X \ni y \neq 0 \quad x=0 \in X \quad (X, \delta) \quad (13Q)$$

$$d(2x, 2y) = 2d(x, y) \Rightarrow \delta(0, 2y) = 2\delta(0, y) \Rightarrow \delta(0, 2y) = 2$$

وهذا غير ممكن

p. 106

(9Q)  $(X, d)$  ف. متري متراس  $M \subseteq X$  منقطة

نبر الحالات التالية :

(1)  $M = X$   $\Leftrightarrow$   $M$  متراسة

(2)  $M = \emptyset$   $\Leftrightarrow$   $M$  متراسة

(3) لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر المجموعة  $M$ , فإن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر الفضاء

$X$  المتراس, لنا قوي المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة من  $x \in X$ .

إن  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر المجموعة  $M$  (لأن  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية من  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) متقاربة

من  $x \in X$  وكون  $M$  منقطة, نجد:  $x \in M$ , بالتالي المجموعة  $M$  متواصلة.